Projet GAMMA

Génération Automatique de Maillages et Méthodes d'Adaptation

Localisation : *Rocquencourt*

Mots-clés : triangulation, maillage, maillage adaptatif, éléments finis, estimateur d'erreur, parallélisation, visualisation.

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Paul Louis George, Directeur de Recherche

Responsable permanent

Frédéric Hecht, Directeur de Recherche

Secrétaire

Maryse Desnous, TR Inria (en commun avec Mostra)

Conseiller scientifique

Olivier Pironneau, Professeur, Université Paris 6

Personnel Inria

Pascal Frey, Chargé de Recherche
Patrick Laug, Chargé de Recherche
Éric Saltel, Directeur de Recherche

Chercheurs invités

Chokri Bekkey, E. Polytechnique de Tunis (juillet-septembre)
Moez Kallel, E. Polytechnique de Tunis (juillet-septembre)

Ingénieur expert

Matthieu Hallard, Simulog

Chercheur post-doctorant

Houman Borouchaki, jusqu'à fin septembre

Chercheurs doctorants

Éric Séveno, allocataire MESR, Université Paris 6
Philippe Pebay, Éducation nationale, Université Paris 6

Stagiaire

Rachid Ouachtaoui, Paris 6

Collaborateur extérieur

Jérome Galtier, U.V.S.Q. et E.D.F.

2 Présentation du projet

Le projet GAMMA a été constitué en 1996 dans le cadre de la restructuration des projets Modulef et Menusin. À ce titre, il regroupe l'ensemble des activités de ces projets concernant l'aspect génération automatique de maillages afin de construire les supports utilisés dans des calculs par la méthode des éléments finis. Il fédère également les aspects post-traitement et visualisation des résultats issus de tels calculs.

L'évolution actuelle de la demande en termes de génération automatique de maillages implique une évolution des méthodes de création de maillages vers des méthodes permettant de construire des maillages contrôlés soit isotropes, où le contrôle concerne les tailles souhaitées, soit anisotropes, où le contrôle concerne des directions et des tailles selon ces dernières.

Le développement d'algorithmes de maillages gouvernés sert de support naturel à la conception de boucles de maillages adaptatifs qui, via un estimateur d'erreurs a posteriori, permettent de contrôler la qualité des solutions.

Ce souci amène à considérer le problème du maillage ou du remaillage des courbes et surfaces, frontières des domaines de calculs traités.

La taille, en termes de nombre de nœuds, des maillages nécessaires pour certaines simulations, amène à travailler sur la parallélisation des processus de calculs. Cette préoccupation conduit à s'intéresser à l'aspect parallélisation au niveau même de la génération des maillages.

Simultanément, le volume des résultats obtenus dans de telles simulations, nécessite d'envisager le post-traitement de ces résultats en parallèle ou par des méthodes appropriées.

3 Actions de recherche

3.1 Tétraédrisation de Delaunay et approche frontale

Participants : Pascal Frey, Houman Borouchaki

Mots-clés : Delaunay, approche frontale.

L'idée de base de cette étude est de tirer parti des avantages respectifs des méthodes de type Delaunay et des méthodes par avancée de fronts.

Le schéma général proposé consiste à partir d'un maillage de Delaunay contraint contenant les faces de la frontière du domaine considéré, à construire les points internes nécessaires à l'aide d'une méthode frontale avant de les insérer par une approche de Delaunay. Ce processus est itéré jusqu'à obtention du maillage final.

Ces points internes sont construits, par approche frontale, en se basant sur les triangles d'un front constitué en analysant le maillage actuel, de façon à former des tétraèdres optimaux.

Cette approche apporte trois contributions aux méthodes existantes

- les points sont positionnés par approche frontale en se basant sur une définition de longueur (d'arêtes) normalisée de manière à satisfaire une carte de tailles,
- la convergence est assurée grâce à une identification automatique du front à chaque itération,
- une optimisation est effectuée à la fin du processus qui prend en compte des critères de longueur normalisée.

Ce type d'approche est, dans son principe, généralisable au cas où des maillages anisotropes sont à construire.

3.2 Tétraédrisation par une approche frontale

Participant : Éric Séveno, Frédéric Hecht

Mots-clés : approche frontale.

Il s'agit ici de développer un algorithme de maillage par une méthode frontale tant dans la façon de construire les points que dans celle de les connecter.

Des difficultés, inhérentes au cas de la dimension trois, existent. Elles sont liées au fait qu'il n'existe pas de théorie permettant de construire un algorithme efficace et convergent.

Les problèmes de validité du maillage (intersection) ont été résolus efficacement. Un maillage de contrôle, provenant d'une méthode de Delaunay, a été intégré afin de guider la construction. Il reste cependant quelques problèmes de convergence liés à l'existence ou à la génération au cours de l'algorithme de situations pathologiques.

La conception et le développement de l'algorithme sont menés en utilisant des structures de données nouvelles (dans le cadre de l'action de développement Génie). Le code est écrit en Fortran90 et constitue une maquette grandeur réelle permettant de tester ce langage.

3.3 Maillage de données volumétriques

Participants : Pascal Frey, Houman Borouchaki

Mots-clés : données discrètes.

Les surfaces ou volumes implicites sont fréquemment rencontrés dans les applications CAO, et résultent généralement d'opérations de type CSG (Constructive Solid Geometry). D'autre part, l'avènement de scanners rapides et précis permet l'obtention de données volumétriques pour des applications médicales ou industrielles. Dans ce contexte, le problème de l'extraction d'une isosurface est étroitement lié au problème plus général de la reconstruction (triangulation) d'une surface implicite.

Plusieurs algorithmes ont été proposés, qui ne requièrent aucune information sur la topologie d'un objet autre que celle qui peut être extraite des données.

Une nouvelle technique de maillage de surfaces a été développée. Les maillages générés sont composés de triangles uniquement ou de triangles et de quadrangles (maillages mixtes). L'originalité de la méthode vient de l'attention particulière apportée à la construction d'une approximation géométrique de la surface considérée en en contrôlant l'écart à la surface. En outre, le couplage avec un espace de contrôle de type *octree* permet de réduire sensiblement le nombre d'éléments générés.

L'extension de cet algorithme au maillage volumique des objets (recouvrement par des tétraèdres) est naturelle et a également fait l'objet de cette étude. On peut en effet construire en s'inspirant des mêmes idées un maillage de l'objet.

3.4 Maillage en quadrangles

Participants : Houman Borouchaki, Pascal Frey

Mots-clés : quadrangle.

Il existe principalement deux approches pour construire un maillage quadrangulaire d'un domaine quelconque de R^2 et pour traiter le cas d'une surface paramétrique.

Pour la première approche, dite approche directe, on trouve essentiellement deux méthodes qui sont basées soit sur la décomposition de domaine et l'application locale d'une méthode algébrique, soit sur une technique de pavages du domaine en quadrangles.

La première méthode est sensible à la décomposition effectuée et nécessite que les sous-domaines résultants soient quasi-convexes. Les algorithmes de décomposition de domaine requièrent généralement une connaissance locale ou globale du domaine. En particulier, dans ce dernier cas, le squelette du domaine peut être utilisé pour le décomposer fidèlement. La détermination de ce squelette pour un domaine de R^2 est plus ou moins résolue, mais reste un problème ouvert dans le cas des surfaces paramétriques.

La deuxième méthode consiste à générer le pavage du domaine, de la frontière vers l'intérieur, et à gérer les collisions quand deux fronts s'intersectent. Récemment cette méthode a été généralisée au cas des surfaces paramétriques, en prenant en compte les plans tangents, ainsi que les rayons de courbures. Par nature, cette méthode est sensible à la discrétisation de la frontière du domaine ou de la surface.

Dans le cas où un champ constant de métriques isotrope est spécifié, ces deux méthodes sont plus ou moins équivalentes. Par contre, dans le cas où un champ quelconque est spécifié, la deuxième méthode peut éventuellement suivre ce champ à la différence de la première. Une amélioration potentielle de la première méthode consiste à redéfinir le squelette par rapport au champ spécifié en se plaçant dans un contexte riemannien. Il s'agit là, néanmoins, d'un problème théoriquement difficile compte tenu de la structure riemannienne.

Pour la seconde approche, dite approche indirecte, la méthode consiste à partir d'un maillage triangulaire et à générer des quadrangles, en regroupant deux à deux les triangles. On trouve également, ici, deux classes de méthodes.

Dans la première, le regroupement des triangles est dirigé par un critère sur la qualité des quadrangles et peut conduire à un maillage mixte (composé de quadrangles et de triangles).

Dans la deuxième, le maillage résultant ne comprend que des quadrangles si la discrétisation de la frontière comprend un nombre pair de sommets. Le regroupement se fait à partir de la frontière en progressant vers l'intérieur du domaine, en s'assurant qu'à chaque intersection de fronts, les fronts résultants possédent un nombre pair de sommets, résultat assuré par ajout éventuel de sommets au maillage initial. Ce procédé demande une classification topologique des cas relatifs aux chocs de fronts.

Notre étude propose une méthode basée sur une approche indirecte, appartenant à la première catégorie, qui généralise le procédé d'appariement des triangles au cas où un champ de métriques est spécifié. Ainsi d'une manière naturelle, on peut générer le maillage quadrangulaire d'un domaine plan ou d'une surface paramétrique via le domaine des paramètres. Par ailleurs, on introduit une nouvelle procédure d'optimisation du maillage résultant basée sur un "bougé" contrôlé des points.

3.5 Maillage de courbes

Participants : Patrick Laug, Houman Borouchaki

Mots-clés : maillage de courbes.

Nous nous plaçons dans un contexte de maillages adaptatifs. Ceci se traduit par les étapes suivantes

- un logiciel de CAO fournit un *maillage de définition géométrique*, qui est une discrétisation suffisamment fine de la frontière Γ du domaine Ω,

- un *support géométrique* est construit à partir de ce maillage,
- ce support est maillé en respectant une carte de métriques $\{\mathcal{M}_i\}$ donnée par l'utilisateur ou calculée automatiquement. Chaque métrique représente le pas de la discrétisation souhaité selon toutes les directions,
- ce maillage de courbes sert de base à un mailleur de domaines, qui est gouverné par une carte de métriques interpolées sur $\{\mathcal{M}_i\}$,
- les résultats du calcul par éléments finis sur le maillage est analysé par un *estimateur*. Si le résultat n'est pas satisfaisant pour l'estimateur utilisé, on crée une nouvelle carte de métriques $\{\mathcal{M}'_i\}$. Un nouveau maillage de courbes est obtenu et le processus est itéré jusqu'à ce que les résultats soient jugés satisfaisants.

Les recherches ont porté essentiellement sur

- **L'interpolation d'une suite de points par une spline cubique.** Plusieurs méthodes ont été expérimentées, Catmull-Rom (pur ou modifié), Hosaka, et de Boor (avec espacement des nœuds de type uniforme, longueur de corde, centripète, corde affine invariante, ou angle affine invariant). Si la discrétisation initiale n'est pas suffisamment fine, les splines obtenues peuvent être très différentes.
- **L'approximation d'une spline cubique par un segment polygonal.** Notre méthode consiste à subdiviser récursivement la spline, jusqu'à l'obtention d'une certaine tolérance relative.
- **Le maillage contrôlé des courbes**. À partir d'une carte discrète de métriques, une métrique continue est obtenue par interpolation. Les calculs des longueurs dans cette métrique continue donnent lieu à des calculs d'intégrales, qui sont effectués de manière exacte dans le cas isotrope et approchée dans le cas anisotrope.

Les recherches en cours consistent à généraliser les méthodes précédentes en trois dimensions.

3.6 Maillage de surfaces

Participants : Pascal Frey, Houman Borouchaki, Éric Saltel

Mots-clés : surface paramétrique, surface polyédrique.

3.6.1 Évaluation de surfaces

Dans le cadre de la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis, la qualité d'un maillage de surface est un critère important en raison de son impact sur d'une part la précision des solutions numériques etla convergence du calcul et d'autre part sur la qualité d'un maillage tridimensionnel dont cette surface est la donnée (en effet, la qualité 3d est en général liée à la qualité du plus mauvais élément de la surface).

D'un point de vue théorique, le problème est d'approcher la vraie surface le plus fidèlement possible par une surface plane par morceaux. Il faut donc contrôler l'écart entre la surface et les éléments de la triangulation. En outre, dans le contexte des méthodes d'éléments finis, la triangulation doit satisfaire des requis relatifs à la taille et à la forme des éléments. Ainsi, par définition, un maillage de surface de type élément fini est une triangulation qui approche la surface au second ordre et est compatible avec une carte de tailles spécifiée. Pour aider à l'analyse des propriétés géométriques de tels maillages, quelques critères généraux sont introduits. Cette approche ne requiert aucune représentation paramétrique ou implicite (modèle géométrique) pour une triangulation donnée. En d'autres termes, les propriétés de la surface sont évaluées à partir de la seule représentation discrète (*i.e.* le maillage). Si une carte de tailles est spécifiée (par exemple à partir d'un estimateur d'erreurs a posteriori), la méthode doit en tenir compte. Cette étude propose deux schémas de validation concernant

– l'approximation géométrique de la surface, basée sur la représentation polyédrique;

– l'adéquation du maillage de surface aux requis de type éléments finis.

Les propriétés géométriques étudiées concernent la conformité par rapport aux plans tangents, le signe de la courbure, le degré de rugosité, le rayon de courbure minimal et l'écart à la surface.

3.6.2 Surfaces paramétriques

Nous proposons une nouvelle méthode qui consiste à trianguler l'espace des paramètres avec un contrôle, pour chaque sommet du maillage, sur l'écart maximal entre toutes les arêtes issues de ce sommet et la surface, ce contrôle s'avèrant suffisant pour obtenir un maillage satisfaisant. La méthode proposée traduit alors ce contrôle en un critère sur la longueur des arêtes du maillage. Plus généralement, en contrôlant ces longueurs d'arêtes on peut obtenir différents types de maillage gouverné de la surface, et en particulier un maillage isotrope de taille donnée.

Le schéma de construction du maillage comprend différentes étapes

– on construit un premier maillage quelconque, suffisamment fin (c'est-à-dire possédant beaucoup de points aux endroits où la variation de courbures sur la surface est importante), dans l'espace des paramètres et en reportant ce maillage sur la surface, on obtient alors un premier maillage de la surface,

– en chaque sommet du maillage surfacique, on définit une métrique de telle manière que la longueur idéale (souhaitée) des arêtes issues de ce sommet dans toutes les directions soit égale à l'unité,

– le champ de métriques ainsi défini est "reporté" dans l'espace des paramètres,

– une structure riemannienne est alors construite dans l'espace des paramètres grâce au maillage initial et la carte de métriques induite associée,

– on retriangule l'espace des paramètres de telle manière que toutes les arêtes du maillage aient une longueur unité dans la structure riemannienne, ce maillage est appelé *maillage unité*,

– on reporte le maillage unité de l'espace des paramètres sur la surface, donnant ainsi le maillage (unité) désiré.

La méthode consiste ainsi à générer le maillage unité de l'espace des paramètres via une structure riemannienne.

3.6.3 Surfaces polyédriques

Le problème est de construire un maillage isotrope ou anisotrope d'une surface définie de façon discrète par une triangulation et éventuellement quelques informations de nature géométrique (présence de points singuliers ou coins, d'arêtes singulières ou arêtes vives, etc.) fournies par la CAO.

Le problème se décompose en deux parties. La première consiste à définir un support géométrique manipulable facilement par le mailleur. Ce support est construit soit à partir de la CAO directement quand cela est possible soit à partir d'un maillage suffisamment fin (où la finesse est fonction de la géométrie) de la surface. La seconde partie consiste à utiliser ce support pour remailler la surface initiale.

Le support géométrique se présente comme un ensemble de triangles aux sommets desquels les normales sont connues et de la liste explicite des singularités (coins et arêtes vives). Ces informations permettent de construire une représentation mathématique unifiée G^1 de la surface. Pour ce faire, on utilise des courbes de Bézier (polynômes de Bernstein) cubiques pour les arêtes et, par élévation du degré, on définit le carreau lui-même.

Une métrique intégrant les courbures et les directions principales en chaque point est calculée. Cette métrique, de nature géométrique, sera, le cas échéant, intersectée avec une métrique dérivée d'un calcul, pour définir la métrique servant à gouverner le processus de remaillage. De cette façon, on assure que la forme de l'objet sera préservée (au mieux).

La méthode de remaillage revient alors à remailler les arêtes singulières du maillage initial en sous-arêtes de longueur unité (dans la métrique) puis à remailler toutes les autres arêtes. À l'issu de cette étape, une optimisation par bascule d'arêtes, gouvernée par la métrique, est effectuée. Ensuite les points sont filrés et le processus est itéré.

Ce code a été écrit en Fortran90.

3.7 Décomposition de domaine

Participants : Jérome Galtier, Paul Louis George

Mots-clés : parallélisation, partition a priori de maillage.

Le calcul parallèle est un moyen permettant de considérer des problèmes de très grande taille (en termes de nombre d'inconnus). Utilisé dans le cadre d'une méthode de résolution de type décomposition de domaines, ce type de calcul nécessite la construction du maillage de plusieurs domaines, dont l'union recouvre le domaine complet. Ces maillages doivent satisfaire un certain nombre de propriétés et doivent communiquer entre eux. Du point de vue de l'algorithmique de maillage à mettre en œuvre, un calcul parallèle s'appuie sur une *partition* du domaine composée de plusieurs maillages (de façon à ce que chaque processeur traite le calcul correspondant à un maillage). La construction de cette partition tout comme celle des maillages de ses membres peut se faire de plusieurs manières.

On distingue en effet trois approches, l'une a posteriori, les deux autres a priori. Le partitionnement a posteriori revient à construire un maillage du domaine complet puis à le découper en sous-maillages. Une partition a priori peut se faire soit en s'appuyant sur un maillage "grossier" du domaine complet qui est alors découpé en sous-domaines, chacun étant ensuite maillé de façon à construire les sous-maillages. Une alternative consiste à construire la partition en utilisant uniquement la discrétisation de la frontière du domaine.

Ce dernier type de prépartitionnement est une technique novatrice pour le calcul parallèle distribué par éléments finis. Son principe est de partitionner un domaine avant d'en avoir maillé l'intérieur. Partant d'une description d'un domaine défini par la liste de ces faces frontières, le programme construit un ensemble de faces qui constitueront la frontière entre les différents sous-domaines. Ces faces sont construites d'après un critère de Delaunay, et tendent vers une forme lisse lorsqu'elles ne subissent pas les contraintes du bord du domaine. On obtient donc des *séparateurs* plus réguliers et de taille réduite. D'autre part, on parallélise l'étape de maillage, et surtout on diminue la mémoire requise pour les exemples de taille importante. Le choix du lieu exact où le séparateur doit être construit reste un problème difficile, et fait l'objet de la suite de cette étude.

3.8 Estimateur d'erreurs et construction de métriques

Participants : Manolo Castro-Diaz(projet Menusin), Frédéric Hecht, Bijan Mohammadi(projet M3N), Rachid Ouachtaoui

Mots-clés : estimation a posteriori, métrique.

Les outils de maillage dont nous disposons, reposent sur la connaissance d'un champ de matrices $\mathcal{M}$ symétriques positives en tous points de l'espace que nous appelons métrique. Cette métrique définit un espace riemannien, où la longueur l d'une courbe $\gamma \in C^1[0,1]$ est donnée par $\sqrt{{}^t\nabla\gamma(t)\mathcal{M}(t)\nabla\gamma(t)}$. Les mailleurs construisent des maillages tels que les longueurs d'arêtes soient le plus proche possible de l'unité.

La première idée pour construire cette métrique, est d'équi-répartir l'erreur d'interpolation de la solution u du problème.

Pour une méthode d'éléments finis P^1 et pour la norme L^∞, la métrique définie par

$$M(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|$$

équi-répartit l'erreur à niveau constant égale à ε. La valeur absolue $|A|$ d'une matrice symétrique A est la matrice symétrique positive qui a les mêmes vecteurs propres que A, et qui a pour valeurs propres, les valeurs absolues des valeurs propres de A (i.e. $|A| = (A^2)^{\frac{1}{2}}$).

Castro Diaz a montré comment construire des métriques pour d'autres types d'interpolation (P^2,..), ou d'autres normes (L^2, H^1, energie, ...)

Ces idées donnent de bons résultats dans les cas scalaires (une inconnue) mais généralement les vrais problèmes sont vectoriels. D'où l'idée de construire une métrique par inconnue et de trouver une nouvelle métrique telle que la boule unité en tout point soit contenue dans les boules unités de chaque inconnue.

Une fois appliquée cette technique, le problème est de choisir les dimensions pour chaque variable, c'est à dire d'adimensionner ces variables.

De plus, il est facile d'ajouter d'autres contraintes dans la construction des métriques, telle qu'imposer le nombre de pas dans l'épaisseur de la couche limite, de prendre en compte la géométrie (les rayons de courbures).

Dans de nombreux cas, travailler avec une norme, ne nous donne qu'une erreur globale, ce qui n'est pas suffisant quand les solutions des problèmes varient de plusieurs ordres de grandeur. Il est préférable alors travailler avec une erreur relatives $\mathcal{E}_r$ définie par

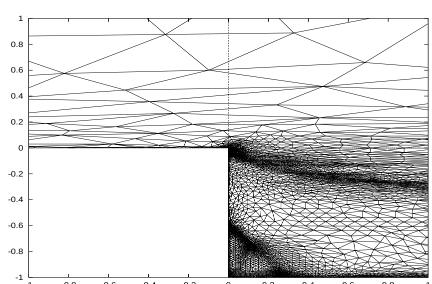
$$\mathcal{E}_r = \frac{||u - \Pi_h(u)||_\infty}{max(|u|, troncature)}$$

ou Π_h est l'opérateur d'interpolation des éléments finis P^1, et ou $troncature$ est un nombre positif pour éviter de diviser par zéro. La métrique définie par

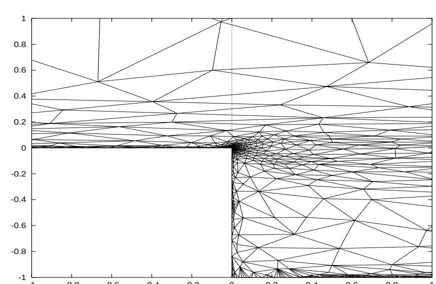
$$M(x) = \frac{1}{\varepsilon\, max(|u|, troncature)} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|$$

équi-répartit l'erreur relative à un niveau constant de ε.

Les deux figures 1 montrent les différences entre ces deux types d'erreurs.



Erreur relative



Erreur globale

Figure 1: *Vue partielle d'une adaptation après un calcul d'écoulement derrière une marche. Les premiere et seconde recirculations sont correctement identifiées avec le critère relatif alors que la seconde recirculation n'est pas capturée avec le critère d'erreur globale.*

3.9 Outils et éléments finis en C++

Participants : Frédéric Hecht, Patrick Laug, Olivier Pironneau, Éric Séveno

Mots-clés : C++, éléments finis, structures de données.

Structures de données.

Il s'agit de définir une organisation des informations qui représentent une géométrie de complexité arbitraire. Cette organisation s'appuie notamment sur un concept de base des méthodologies par objets, celui de *classe* (structures et procédures). Cette information géométrique est un point de passage obligé d'une part pour faire communiquer de manière précise des codes de Mécanique des Fluides et des codes de Structures, et, d'autre part, pour permettre de réaliser des calculs en maillages adaptatifs. Les tâches prévues ont été terminées en fin de phase 1 de Génie, pour le cas de la dimension deux et nous nous proposons de nous baser sur cette expérience pour spécifier une nouvelle structure en trois dimensions.

C++ et éléments finis.

Le but de ces recherches est d'utiliser les capacités des nouveaux langages de programmation (réutilisabilité, aspect orienté objet, masquage des données pour l'utilisateur, surcharge des opérateurs) pour l'implémentation de la méthode des éléments finis. Nous avons défini des structures génériques (`template`), qui nous permettent trivialement de passer de la résolution de problèmes scalaires (*par exemple: équation de la chaleur, ...*), à des problèmes vectoriels *(par exemple: problème de Navier Stokes incompressible, ...)* ou même à des problèmes à valeurs complexes *(par exemple: équation de Helmholtz,...)*.

Le logiciel `freeFem` est une réalisation de ces idées, il est distribué sur le réseau.

4 Actions industrielles

4.1 Collaboration avec Simulog

Une collaboration étroite se poursuit avec Simulog. Dans ce cadre, cette filiale de l'INRIA a un rôle multiple de valorisation et industrialisation des logiciels développés au sein du projet, de commercialisation et de transfert de technologie. Par ailleurs, un travail en commun est mené qui, au travers de M. Hallard, porte sur

– les problèmes de suivi de frontières afin de pouvoir définir des éléments finis plus riches que les éléments P^1,

– les problèmes de remaillage de surface avec, en particulier, un effort sur la décimation de maillage,

– le développement de prototypes pour construire une maquette de mailleur libre tridimensionnel adapté. Actuellement, les outils de base nécessaires à un tel mailleur sont développés dans un cadre isotrope. L'étude se poursuivra en traitant le cas anisotrope général.

5 Actions nationales et internationales

5.1 Actions nationales

T. Coupez de Sophia Antipolis (CEMEF, unité associée CNRS D 1374) a été invité pour un séminaire.

Le logiciel GHS3D (mailleur automatique tridimensionnel basé sur une méthode de type Delaunay) a été mis à disposition à l'INSA de Rouen (Pr. G. Touzot), et à l'E.N.S. de Cachan (Pr. P. Ladevèze).

5.2 Actions internationales

5.2.1 Europe de l'Ouest

C. Armstrong de Belfast (Q.U.B.) est venu en visite à l'Inria où il a donné un séminaire. Une collaboration est prévue, dans un cadre européen (LTR) avec la Q.U.B. et Simulog.

Le logiciel GHS3D (mailleur automatique tridimensionnel basé sur une méthode de type Delaunay) a été mis à disposition à l'université de Séville (Pr. E. Fernadez-Cara) dans le cadre d'une collaboration franco-espagnole.

L'Inria est partenaire du Contrat HPCN MICA. Ce projet, coordonné par la société de service CHAM en Angleterre, regroupe outre l'INRIA, le LSTM d'Erlangen, les Universités de Saragosse et d'Athènes, et dix industriels travaillant dans le secteur des fours ou de l'environnement. Ce projet HPCN a pour finalité de mettre en place un réseau de calcul et d'expertise en CFD auprès des PME en Europe, consultable par réseau électronique, et manipulant les données sous forme de réalité virtuelle.

5.2.2 Amérique

Le logiciel GHS3D a été mis à disposition à l'université du Minnesota à Minneapolis (Pr. D. Joseph), à l'université de Houston (Pr. R. Glowinski) et à l'université du Colorado à Boulder (Pr. Ch. Farhat).

Après évaluation, ce logiciel est en cours d'intégration dans un code général d'un important éditeur américain de logiciels.

6 Diffusion des résultats

6.1 Actions d'enseignement

F. Hecht donne en D.E.A. à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6) un cours sur C++ et les éléments finis.

F. Hecht a donné au Pôle Universitaire Léonard de Vinci un cours sur les techniques de maillages et sur C++ et les éléments finis.

P. Laug a donné au Pôle Universitaire Léonard de Vinci un cours sur la programmation en Fortran 90 et sur Unix.

6.2 Participation à des colloques

Des membres de l'équipe ont participé à des conférences et *workshops* ; on se reportera à la bibliographie pour en avoir la liste.

6.3 Conférences invitées, tutoriels, cours, etc.

F. Hecht a été invité à Houston (U. of H.), Québec (U. de Laval), à Princeton (U. of. P.) pour des séminaires.

P.L. George a été invité à Lausanne (E.P.F.L.), à Santa Carlos de Barriloche (Argentine), à l'E.D.F. (Clamart), à l'université Paris 7 pour des séminaires.

P.L. George a été invité aux journées du C.I.R.M. à Luminy pour un cours sur "Estimations a posteriori et adaptation de maillage".

F. Hecht et P.L. George ont été invités à Montréal (Concordia U.). Une action franco-candienne est en cours de montage.

P. Frey a été invité à Princeton pour donner un séminaire.

P. Laug a participé au cours Inria (Sophia) sur les techniques de développement pour codes numériques.

P. Laug a donné un séminaire à l'Inria (Rocquencourt) sur Fortran 90.

6.4 Animations scientifiques

P.L. George a participé aux Journées Industrielles du thème 4.

6.5 Diffusion de logiciels

La diffusion des logiciels issus des travaux de recherche suit le principe suivant: les logiciels en deux dimensions sont accessibles de tous tandis que les logiciels en trois dimensions font l'objet d'accords précis de nature scientifique pure ou de type commercial.

À ce titre, l'équipe a mis dans le domaine public les logiciels BL2D, Emc^2 et FreeFEM.

`ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Gamma`

Tandis que pour la diffusion des logiciels existants ou à venir en trois dimensions, l'Inria et Simulog, en collaboration étroite, proposent différentes solutions permettant des mises à disposition, des évaluations, ou des ventes (sous des formes adaptées).

7 Publications

Articles et chapitres de livre

[424] H. Borouchaki, P. L. George, F. Hecht, P. Laug, E. Saltel, «Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part 1: Algorithms», *Finite Elements in Analysis and Design 0*, 1996, p. 000–000.

[425] H. Borouchaki, P. L. George, S. H. Lo, «Optimal Delaunay point insertion», *Int. j. numer. methods eng. 39(20)*, 1996, p. 3407–3438.

[426] H. Borouchaki, P. L. George, B. Mohammadi, «Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part 2: Application examples», *Finite Elements in Analysis and Design 0*, 1996, p. 000–000.

[427] H. Borouchaki, P. L. George, «Mailleur de Delaunay gouverné par une carte», *C.R. Acad. Sci. Paris 323*, 1996, p. 1141–1146.

[428] H. Borouchaki, P. L. George, «Triangulation de Delaunay et métrique riemannienne,», *C.R. Acad. Sci. Paris 323*, 1996, p. 1195–1200.

[429] H. Borouchaki, P. L. George, «Triangulation de Delaunay et métrique riemannienne. Applications aux maillages éléments finis», *Revue Européenne des Éléments Finis 5(3)*, 1996, p. 323–340.

[430] H. Borouchaki, P.L.George, B. Mohammadi, «Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications. Part II: Applications», *Finite Element in Analysis and Design*, 1996.

[431] N. Devaux, F. Hecht, «Sur l'implémentation d'un modèle de turbulence ASM, et l'étude du sous-système algébrique non-linéaire associé», *C.R. Acad. Sci. Paris 322*, Série II b, 1996, p. 463–468.

[432] P. L. George, «Improvement on Delaunay based 3D automatic mesh generator», *Finite Elements in Analysis and Design 0*, 1996, p. 000–000.

[433] F. Hecht, B. Mohammadi, «Mesh Adaption by Metric Control for Multi-scale Phenomena and Turbulence», *AIAA-97-0859*, 1997.

[434] M. Thiriet, G. Martin-Borret, F. Hecht, «Ecoulement rhéofluidifiant dans un coude et une bifurcation plane symétrique. Application à l'écoulement sanguin dans la grande circulation.», *J. Phys. III*, 6, 1996, p. 529–542.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[435] H. Borouchaki, M. Castro, P. L. George, F. Hecht, B. Mohammadi, «Anisotropic adaptive mesh generation in two dimensions», *in : Proceedings of 5^{th} International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Filed Simulations*, p. 197–208, Mississipi State University, 1996.

[436] H. Borouchaki, M. Castro, F. Hecht, P.L.George, B. Mohammadi, «Anisotropic Adaptive Mesh Generation in Two Dimensions CFD», *in : Computational Fluid Dynamics 96*, J. A. Désidéri, C. Hirsch, P. Le Tallec, M. Pandolfi, J. Périaux (réd.), J. Wiley & Sons, p. 181–186, Paris, September 1996. Proceedings of ECCOMAS Conference.

[437] H. Borouchaki, P. J. Frey, P. L. George, «Unstructured triangular-quadrilateral mesh generation», *in : Proceedings of the Fifth International Meshing Roundtable*, Pittsburgh, PA, 1996.

[438] P. J. Frey, H. Borouchaki, «Delaunay tetrahedralization using an advancing-front approach», *in : Proceedings of the Fifth International Meshing Roundtable*, Pittsburgh, PA, 1996.

[439] P. J. Frey, H. Borouchaki, «Finite element meshes by means of voxels», *in : Proceedings du congrès DGCI'96*, Lyon, 1996.

[440] P. J. Frey, «Tétraédrisation de Delaunay basée sur une approche frontale», *in : Proceedings du congrès Strucome 96*, Paris, 1996.

[441] J. Galtier, P. L. George, «Prepartitionning as a way to mesh subdomains in parallel», *in : Proceedings of the Fifth International Meshing Roundtable*, Pittsburgh, PA, 1996.

[442] F. Hecht, B. Mohammadi, «Mesh Adaption by Metric Control for Multi-scale Phenomena and Turbulence», *in : Computational Fluid Dynamics 96*, J. A. Désidéri, C. Hirsch, P. Le Tallec, M. Pandolfi, J. Périaux (réd.), Paris, September 1996.

[443] E. Séveno, «Mailleur frontal 3D», *in : Proceedings du 28e congrès D'Analyse Numérique*, La Londe, Les Maures, 1996.

Rapports de recherche et publications internes

[444] H. Borouchaki, P. J. Frey, P. L. George, «Maillage de surfaces paramétriques. Partie III: Eléments quadrangulaires», *rapport de recherche n°2954*, Inria, juillet 1996, ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RR/RR-2954.ps.gz.

[445] H. Borouchaki, P. J. Frey, «Adaptive Triangular-Quadrilateral Mesh Generation», *rapport de recherche n°2960*, Inria, juillet 1996, ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RR/RR-2960.ps.gz.

[446] H. Borouchaki, P. L. George, «Maillage de surfaces paramétriques. Partie I: Aspects Théoriques», *rapport de recherche n°2928*, Inria, juillet 1996, ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RR/RR-2928.ps.gz.

[447] H. Borouchaki, P. L. George, «Maillage de surfaces paramétriques. Partie II: Exemples d'applications», *rapport de recherche n°2944*, Inria, juillet 1996, ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RR/RR-2944.ps.gz.

[448] N. Devaux, F. Hecht, «Preliminary study of the non-linear system of an ASM turbulence model», *Rapport de recherche*, Inria, 1996.

[449] P. J. Frey, H. Borouchaki, P. L. George, «Tétraédrisation de Delaunay basée sur une approche frontale», *rapport de recherche n°2882*, Inria, mai 1996, ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RR/RR-2882.ps.gz.

[450] P. J. Frey, H. Borouchaki, «Critères géométriques pour l'évaluation des triangulations de surfaces», *rapport de recherche n°2951*, Inria, juillet 1996, ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RR/RR-2951.ps.gz.

[451] F. Hecht, M.-H. Lallemand, P. Le Tallec, «Technical Annex to the Periodic Progress Report I», *Rapport d'avancement*, Inria, juillet 1996.

[452] P. Laug, H. Borouchaki, P. L. George, «Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques», *rapport de recherche n°2818*, Inria, mars 1996, ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RR/RR-2818.ps.gz.

[453] P. LAUG, H. BOROUCHAKI, «The BL2D Mesh Generator: Beginner's Guide, User's and Programmer's Manual», *rapport de recherche n°0194*, Inria, juillet 1996, ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RT/RT0194.ps.gz.

8 Abstract

In 1996, the GAMMA project was created in the context of the restructuration of the former projects Modulef and Menusin. The topics covered by Gamma are in short the automatic mesh generation methods developed for finite element purposes.

Methods, algorithms as well as related softwares are developed for classical mesh generation purposes. This task turns nowadays in studying in details the way in which such algorithms can be extended in the context of adaptive mesh generation so as to permit to design automatic loop of computations. The latter being coupled with a posteriori error estimates to make the control of the solution quality possible.

In this respect, isotropic as well as anisotropic mesh generation methods are developed, even in the case of surface meshing.

Parallelization aspects are also covered including automatic partitioning and post-treatments in parallel of large size meshes and solutions.