Projet MIAOU

Mathématiques et Informatique de l'Automatique et de l'Optimisation pour l'Utilisateur

Localisation : *Sophia Antipolis*

Mots-clés : système dynamique, modélisation de système dynamique, jeu dynamique, identification de matrice de transfert, commande, commande robuste, approximation, optimisation, stabilisation de système non linéaire, automatique, automatique non linéaire, feedback non linéaire, système mécanique non holonome.

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Laurent Baratchart, DR Inria

Responsable permanent

Juliette Leblond, CR Inria

Assistante de projet

France Limouzis, TR Inria, à mi-temps dans le projet

Conseiller scientifique

Pierre Bernhard, professeur université de Nice–Sophia Antipolis, depuis juillet

Personnel Inria

Pierre Bernhard, DR Inria, à temps partiel dans le projet jusqu'en juin
Martine Olivi, CR Inria
Jean-Baptiste Pomet, CR Inria
Odile Pourtallier, CR Inria, à mi–temps dans le projet
Franck Wielonsky, IR Inria

Collaborateur extérieur

Andrea Gombani, LADSEB–CNR, Padoue, Italie

Chercheurs invités

Alain Haurie, université de Genève, Suisse, janvier–février
Yuncheng You, université de Floride du Sud, Tampa, USA, juin
Boris Shekhtman, université de Floride du Sud, Tampa, USA, juin
Edward Saff, université de Floride du Sud, Tampa, USA, juin
Jacek Krawczyk, université de Nouvelle Zélande, Wellington, 10–11 juin
Vilmos Totik, Académie des Sciences de Hongrie, Budapest, une semaine en juillet
Jonathan Partington, université de Leeds, U.K., 15–19 juillet
Nick Dudley Ward, université de Leeds, U.K., 15–19 juillet
Herbert Stahl, université Technique de Berlin, Allemagne, une semaine en septembre

Chercheurs post-doctorants

Nick Dudley Ward, bourse HCM, à partir d'octobre
Nabil Torkhani, INRIA, jusqu'en avril

Chercheurs doctorants

Stéphane Crepey, bourse MESR, Ecole Polytechnique
Fabien Seyfert, bourse DRET, Ecole des Mines, co-encadré avec le CMA, EMP

Stagiaires

Nicolas Otto–Loyas, DEA ARAVIS, UNSA, de mi–février à fin juin
Frédéric Viry, DEA ARAVIS, UNSA, de mi–février à fin juin
Nicolas Bergevin, Maîtrise Maths–Info., IUP GMI, Paris IX–Dauphine, de mi–avril à mi–septembre
Julien Calm, Maîtrise Maths–Info., IUP GMI, Paris IX–Dauphine, de mi–avril à mi–septembre
Claire Leleu, Maîtrise Maths–Info., IUP GMI, Paris IX–Dauphine, de mi–avril à mi–septembre
Franck Maurin, Maîtrise Maths–Info., IUP GMI, Paris IX–Dauphine, de mi–avril à mi–septembre

2 Présentation du projet

Le projet conçoit et développe des méthodes effectives en analyse et en optimisation des systèmes dynamiques. Les domaines abordés actuellement sont essentiellement :

- l'approximation dans le domaine complexe et ses applications à l'identification et à la conception de systèmes dynamiques linéaires et de filtres,
- la structure et le contrôle de systèmes dynamiques non-linéaires, en particulier la stabilisation de systèmes non-holonomes et la linéarisation par feedback dynamique,
- les jeux dynamiques, la commande optimale et la commande robuste.

3 Actions de recherche

3.1 Identification et approximation de matrices de transfert

Mots-clés : automatique, identification de matrice de transfert, approximation, optimisation.

Abstraire, sous forme d'équations mathématiques, le comportement d'un phénomène que l'on veut étudier est l'étape dite de *modélisation*. La modélisation a typiquement deux objets : le premier est de décrire le phénomène dans sa complexité minimale compte tenu du but poursuivi, et le second est de se doter d'un outil pour en *prédire* les effets. Ceci est couramment pratiqué à des fins de conception, ou de contrôle, quoique rarement perçu autrement que comme un problème d'optimisation subordonné à chaque cas particulier.

En règle générale, l'utilisateur impose à son modèle une forme paramétrée qui reflète tout à la fois ses habitudes de pensée, sa connaissance physique du phénomène, l'effort algorithmique qu'il est prêt à consentir, et le caractère utilisable du modèle *in fine*. La recherche de ce compromis amène usuellement à poser le problème d'approcher les observations faites par celles qu'on tirerait du modèle sous l'effet d'excitations censées représenter les causes du phénomène. La capacité à résoudre ce problème d'approximation, souvent non–trivial et parfois mal posé, conditionne pour une large part la pratique d'une méthode donnée.

C'est lorsqu'on veut évaluer la puissance prédictive d'un modèle que l'on est amené à *postuler* l'existence d'une *vraie* correspondance fonctionnelle entre les données et les observations, et que l'on entre dans le domaine de l'*identification*. La puissance prédictive du modèle peut s'y exprimer de diverses manières qui toutes, cependant, cherchent à mesurer la différence entre le « vrai » modèle et les observations. La nécessité de prendre en compte les différences patentes entre le comportement observé et le comportement calculé induit alors naturellement la notion de *bruit* comme agent dégradant du processus d'identification. Ce bruit, qui s'incorpore au modèle, peut être traité sur un mode déterministe où la qualité d'un algorithme d'identification est son insensibilité à des petites erreurs. Cette notion est celle de problème bien posé en analyse numérique, ou de stabilité du mouvement en mécanique. Le bruit, cependant, est plus souvent considéré comme aléatoire, et l'on compte alors sur le moyennage pour estimer le « vrai » modèle. Cette notion permet au premier chef de donner des descriptions approchées mais simples de systèmes complexes dont les causes sont mal connues mais plausiblement antagonistes. Notons, dans les deux cas, que des *hypothèses* sur le bruit sont nécessaires pour justifier l'approche adoptée (il doit être petit dans le cas déterministe et satisfaire des hypothèses d'indépendance ou d'ergodicité dans le cas stochastique). Ces hypothèses sont rarement validées autrement qu'à l'usage.

Avec le déplacement du problème depuis le compte–rendu d'une série d'expériences jusqu'à l'estimation d'un hypothétique modèle exact, la problématique de l'identification s'enrichit aussi de la possibilité de choisir les données de façon commode pour explorer la structure du phénomène. Ceci interagit souvent de manière complexe avec le caractère *local* du modèle par rapport aux données.

Alors que le sujet est dominé depuis vingt ans par le paradigme de la statistique paramétrique, c'est pourtant dans une approche déterministe de l'identification des systèmes dynamiques linéaires (c'est–à–dire des processus de convolution), fondée sur l'approximation dans le domaine complexe, que le projet situe sa contribution la plus originale au domaine. Naturellement, les liens profonds que tisse le théorème spectral entre les représentations temporelles et fréquentielles induisent des parallèles bien connus entre la théorie des fonctions et celle des probabilités, et le travail de MIAOU connaît par ce biais quelques retombées dans la théorie stochastique classique. Celles–ci restent néammoins marginales pour l'instant.

Notre abord de l'identification, pragmatique en un sens, consiste à traiter les données qui se présentent sans se préoccuper d'un modèle exact au plan global mais en recherchant une approximation convenable dans le domaine de fonctionnement. Un exemple prototypique est l'identification harmonique, couramment rencontrée en ingénierie, où les données sont les réponses du système à des excitations périodiques dans sa bande passante de fréquences. On cherche en général un modèle linéaire et stable qui décrive correctement le fonctionnement dans cette bande passante, bien que ce modèle puisse être infidèle aux hautes fréquences, qu'on ne peut d'ailleurs guère mesurer. On souhaite aussi que ce modèle soit rationnel et de degré raisonnable s'il se peut, afin de pouvoir l'utiliser efficacement pour le contrôle ou l'estimation. Enfin, aucune statistique n'est disponible sur les erreurs, qui proviennent autant des défauts de mesure que du caractère erroné de l'hypothèse de linéarité. Les applications visées sont l'identification des systèmes résonnants, des structures flexibles, et de certains systèmes diffusifs (chaleur, électrostatique).

Une des caractéristiques de notre approche est la dissociation entre une étape d'identification proprement dite, qui fournit un modèle de dimension infinie —numériquement de dimension grande— et une étape d'approximation rationnelle destinée à réduire l'ordre. Dans ce contexte, il est généralement important de disposer d'approximants rationnels optimaux ou sous-optimaux en un certain sens, parce que l'on veut tirer le meilleur parti de l'ordre alloué au modèle. L'approximation rationnelle dans le domaine complexe est un sujet classique et ardu. En relation avec l'automatique, deux éléments de difficulté supplémentaires s'y greffent, à savoir la nécessité de contrôler les pôles des approximants (pour la stabilité) et celle de traiter le cas matriciel. Notons qu'en matière d'approximation au sens L^p de la fonction de transfert, les valeurs $p = 2$ et $p = \infty$ sont d'un intérêt particulier : la première parce qu'elle correspond à une identification paramétrique au minimum de variance lorsque l'entrée est un bruit blanc (dans le cas d'un bruit coloré il faut pondérer le critère par sa densité spectrale) et également à la minimisation de l'erreur en norme d'opérateur $L^2 \to L^\infty$ dans le domaine temporel, la seconde parce qu'elle correspond à la minimisation de l'erreur au plan de la transmission d'énergie.

Pour des raisons de commodité nous abordons souvent les questions précédentes non sur l'axe imaginaire mais, ce qui est équivalent, sur le cercle unité où elles correspondent à des considérations analogues pour les systèmes à temps discret.

3.1.1 Approximation méromorphe de fonctions de transfert dans une bande de fréquence

Participants : Laurent Baratchart, José Grimm (Projet SAFIR), Juliette Leblond, Jonathan Partington (univ. Leeds, GB), Fabien Seyfert

Mots-clés : approximation méromorphe, identification fréquentielle, problème extrémal.

Le projet travaille depuis plusieurs années à l'élaboration de modèles de convolution linéaires stables à partir de données fréquentielles dans une bande passante Ω et d'un gabarit de référence à l'extérieur de Ω ; la période qui nous occupe a vu un élargissement de la classe des modèles à des instabilités de dimension finie, c'est-à-dire à des opérateurs dont le noyau a pour transformée de Laplace une fonction de transfert méromorphe ayant dans le demi-plan droit un nombre fini de pôles. On se ramène par transformation conforme au cas du cercle unité T, l'intervalle Ω de l'axe imaginaire correspondant alors à un arc de cercle K. Les modèles considérés à ce stade étant de dimension infinie, nous considérons uniquement le cas scalaire et abordons le problème composante à composante si le système a plusieurs entrées ou sorties. Nous nous restreignons donc à l'approximation de fonctions à valeurs complexes.

Si l'on note H^p l'espace de Hardy du disque unité D et R_N l'ensemble des fonctions rationnelles possédant moins de N pôles dans D, l'appartenance de la fonction de transfert à $H^p + R_N$ caractérise par l'intermédiaire de l'exposant p les propriétés de stabilité imposées au modèle en terme de gain entrée–sortie, cependant que N est le nombre maximal de pôles instables autorisé. On cherche donc une fonction de $H^p + R_N$, prenant sur K des valeurs proches des données expérimentales et satisfaisant sur $T \setminus K$ aux exigences de gabarit, de sorte que la question s'énonce comme une généralisation d'un problème de type Adamjan–Arov–Krein (AAK) :

(P) Soient $p \geq 1$, $N \geq 0$, K un arc du cercle unité T, $f \in L^p(K)$, $\psi \in L^p(T \setminus K)$ et $M > 0$; on cherche une fonction $g \in H^p + R_N$ telle que la norme de la différence $h - \psi$ dans $L^p(T \setminus K)$ n'excède pas M et telle que $g - f$ soit de norme minimale β_p dans $L^p(K)$.

Il s'agit là d'une extension au cas méromorphe des *problèmes extrémaux bornés* relatifs à l'approximation analytique (cas où $N = 0$) étudiés ces dernières années dans le projet. Rappelons que, pour $N = 0$ et $1 \leq p \leq \infty$, le problème *(P)* se ramène implicitement à un *problème extrémal* classique sur T ; quand $1 \leq p < \infty$, l'existence et l'unicité de g (établies il y a déjà longtemps mais à paraître depuis peu) font l'objet d'un article[1] qui fournit aussi une caractérisation explicite de la solution si $p = 2$, et un lien inattendu avec les formules de reconstruction de Carleman. Toujours pour $N = 0$, mais cette fois quand $p = \infty$, nous avions montré dans [160] [2] l'équivalence entre *(P)* et un

[1] L. Baratchart and J. Leblond, *Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle with* $1 \leq p < \infty$, à paraître dans Constructive Approximation.

[2] publié cette année seulement

problème de Nehari classique, et conclu ainsi à l'unicité de g lorsque la fonction concaténée $f \vee \psi$, qui vaut f sur K et ψ sur $T \setminus K$, appartient à $H^\infty + C(T)$. Rappelons aussi que des schémas de résolution du problème *(P)* ont été élaborés et implémentés dans le passé pour $N = 0$, et $p = 2$ ou $p = \infty$.

Cette présentation faite, nous décrivons à présent les résultats obtenus cette année. Pour $N = 0$ et $2 < p < \infty$, une généralisation du théorème de Nehari a été établie afin résoudre le problème extrémal classique auquel se ramène *(P)*. Elle exprime la solution en termes d'un vecteur maximisant d'un opérateur de Hankel non-linéaire pour le calcul duquel un algorithme de point fixe a été développé. Il est remarquable que cette généralisation concerne aussi l'approximation méromorphe (cas où $N > 0$), donnant de la théorie AAK une version non-linéaire via le principe du *minimax* de Ljusternik-Schnirelman. Ceci permet de relier le problème classique de AAK ($p = \infty$) à celui de l'approximation rationnelle H^2 et pourrait ouvrir une voie de recherche de ce fait. Aucun algorithme n'existe encore cependant si $N > 0$. Ceci participe de la thèse de F. Seyfert et a donné lieu à une communication [166]. Un article à ce sujet est en cours de rédaction.

Très relié au problème *(P)*, et attrayant pour décider de la validité de l'approximation linéaire dans la bande passante considérée, se trouve le problème de complétion suivant : *(P') Soient* $p \geq 1$, $N \geq 0$, K *un arc du cercle unité* T, $f \in L^p(K)$, $\psi \in L^p(T \setminus K)$ *et* $M > 0$ *; on cherche une fonction* $h \in L^p(T \setminus K)$ *telle que la norme de la différence* $g - \psi$ *dans* $L^p(T \setminus K)$ *n'excède pas* M *et que la distance de* $f \vee h$ *à* $H^p + R_N$ *soit minimale dans* $L^p(T)$.

Dans le cas $p = \infty$ et pour $N \geq 0$, les problèmes *(P)* et *(P')* ont été résolus. Une fois établie l'existence, l'unicité et une caractérisation de la solution de *(P)* lorsque $f \vee \psi \in H^\infty + C(T)$ sont obtenues via l'équivalence entre ce dernier et un problème AAK classique, ceci généralisant le cas $N = 0$. Nous montrons alors comment *(P)* et *(P')* sont reliés entre eux. Ces liens nous permettent de construire une solution à *(P')* en résolvant itérativement *(P)* pour une famille de fonctions dépendant de paramètres implicites en les données ainsi que d'établir l'unicité de la solution de *(P')*, toujours sous l'hypothèse que $f \vee \psi \in H^\infty + C(T)$. Ces résultats s'appliquent à des extensions en données partielles de problèmes d'interpolation du type Nevanlinna–Pick et Carathéodory–Fejér. Ce travail en collaboration avec J.-R. Partington a été soumis pour communication à ECC 97. Un article est en cours de rédaction.

La détermination du gain statique, c'est-à-dire de la valeur à l'infini de la fonction de transfert, joue un rôle particulier dans ce contexte. En effet, ce terme de transmission directe entre l'entrée et la sortie n'est pas localement borné dans la réponse impulsionnelle d'un système linéaire et rend impossible, s'il n'est pas nul, l'appartenance de la fonction de transfert à H^p pour $p < \infty$. Pour identifier cette valeur, importante pour la qualité de la modélisation, on procède actuellement au cas par cas, soit que l'on connaisse le terme de transmission pour des raisons physiques (en particulier lorsqu'il est nul), soit que l'on ajuste sa valeur pour réduire les oscillations du modèle à l'infini. C'est typiquement le cas des données concernant des filtres hyperfréquences que nous a fournies le CNES et dont il sera question plus loin : les voies de transmission sont strictement propres pour des raisons physiques (le filtre ne transmet rien aux hautes fréquences) cependant que les voies de réflexion restituent les fréquences infinies avec un coefficient voisin de 1 mais qui n'est pas exactement connu (car il dépend de pertes occasionnées par des conducteurs que l'on ne mesure pas parfaitement). Déterminer de manière plus systématique ce gain statique nécessite soit d'obérer la discontinuité structurelle des solutions de *(P)* aux extrémités de K, soit d'utiliser la convergence faible de ces solutions pour estimer la moyenne des oscillations à l'infini. Nous avons pour l'instant considéré la première manière en résolvant le même problème dans un espace de Hardy-Sobolev. Pour $p = 2$, la théorie se généralise aisément et l'implémentation, qui s'insère dans la thèse de F. Seyfert, semble efficace sur les données de filtres hyperfréquences que nous étudions (*cf* section 3.1.8). Notons pour finir que, dans le cas fréquent où un système est convenablement approché par un retard superposé à un transfert H_∞, la valeur à l'infini *stricto sensu* n'existe pas puisqu'il y a un terme singulier dans le facteur intérieur de la fonction de transfert. Résoudre *(P)* pour une norme de Hardy-Sobolev en minimisant en outre sa valeur par rapport à des translations fréquentielles de f dans la bande passante est une manière d'aborder la détermination du retard que le projet se propose d'aborder.

3.1.2 Application aux problèmes inverses en diffusion ou propagation ; détection de fissures

Participants : Laurent Baratchart, Nick Dudley Ward, Juliette Leblond, Jonathan Partington (univ. Leeds, GB)

Mots-clés : problème inverse, approximation méromorphe.

Les techniques d'approximation méromorphes esquissées au paragraphe précédent sont susceptibles d'applications bien plus larges que l'identification des opérateurs de convolution $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$. L'analycité des modèles peut provenir, suivant les cas, de la transformation de Fourier appliquée à une EDP linéaire ou du caractère harmonique de l'équation elle-même par exemple en thermique ou en électrostatique. C'est par cette deuxième situation, plus simple, que nous avons entamé la diversification de nos applications, et nous décrivons ci-après le cas de la détection de fissures.

La localisation de fissures dans un matériau, à l'aide de mesures thermiques ou électrostatiques sur sa frontière, est un problème inverse classique pour étudier la fatigue des structures ou détecter les fuites, par exemple. Cependant, aucun algorithme efficace n'existe aujourd'hui pour détecter l'emplacement de telles fissures car l'intégration numérique du problème inverse est très instable. La présence de cavités (« pailles ») dans un objet se traduisant par un défaut d'analycité de la solution du problème de Dirichlet–Neumann associé, elle peut être diagnostiquée en utilisant la théorie d'Adamjan–Arov–Krein ou, lorsque les mesures ne sont disponibles que sur une partie de la frontière, son extension présentée en section 3.1.1. Cette approche originale de la question en est à ses débuts au sein du projet et pose la question de savoir si les pôles et les zéros des approximants méromorphes s'accumulent au voisinage des fissures éventuelles ; elle se couple plaisamment avec l'étude, active en théorie de l'approximation, des ensembles d'accumulation des pôles et des zéros des approximants rationnels.

La généralisation de ces problèmes à la dimension infinie (fonctions à valeurs opérateurs) est aussi envisagée à un peu plus long terme pour ses applications à la tomographie ou la détection de mines, par exemple. Nous sommes, pour ces questions, en contact avec le projet CAIMAN de l'INRIA-Sophia.

3.1.3 Application à l'identification robuste

Participants : Laurent Baratchart, Juliette Leblond, Jonathan Partington (univ. Leeds, GB), Nabil Torkhani

Mots-clés : identification robuste.

Lors de sa thèse soutenue en décembre 1995, N. Torkhani avait résolu en faisant usage de *(P)* le problème d'identification robuste suivant : étant données des mesures que l'on suppose être de la forme $(a_k) = f(z_k) + \eta_k$ où les points de mesures z_k appartiennent à un sous-arc K du cercle unité cependant que f appartient à l'algèbre du disque (c'est–à–dire est la fonction de transfert d'un système linéaire stable qui peut être approché en norme d'opérateur $L^2 \rightarrow L^2$ par un système de dimension finie), la suite $\eta = (\eta_k)$ étant bornée et représentant une erreur de mesure ou de modélisation.

(P2) : étant donnés $\psi, r \in C(T \setminus K)$, $r > 0$, on cherche une suite de fonctions $f_n = f_n(a_1, ..., a_n) \in H^\infty \cap C(T)$ approximant robustement f sur K :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \leq \epsilon} \|f_n - f\|_{L^\infty(K)} = 0,$$

et qui, sur $T \setminus K$, satisfasse la contrainte de gabarit :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \leq \epsilon} |f_n(z) - \psi(z)| \leq r(z) \;\; \forall\, z \in T \setminus K.$$

Cette recherche effectuée les années passées s'est conclue cette année avec une implémentation en C réalisée par N. Torkhani et la publication des résultats [180][3].

[3] voir aussi L. Baratchart and J. Leblond and J.-R. Partington and N. Torkhani, *Robust identification from band–limited data*, à paraître IEEE Trans. Aut. Cont.

3.1.4 Approximation rationnelle scalaire

Participants : Laurent Baratchart, Juliette Leblond, Franck Maurin, Martine Olivi, Edward Saff (univ. Tampa, USA), Herbert Stahl (TU Berlin, Al.), Frédéric Viry, Franck Wielonsky

Mots-clés : approximation rationnelle, étude des points critiques, espace de Hardy pondéré, polynôme orthogonal.

L'approximation rationnelle est une étape fondamentale de réduction du modèle en identification de systèmes dynamiques qui soulève de nombreuses difficultés. Dans le cadre présent, le problème s'énonce ainsi :

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $f \in H^p$ et n un entier ; on cherche une fonction rationnelle sans pôles dans le disque unité et de degré au plus n qui soit le plus proche possible de f dans H^p.

Les valeurs les plus importantes de p sont, comme nous l'avons indiqué en introduction, $p = 2$ et $p = \infty$, mais il n'existe de toute façon pas d'algorithme démontrablement convergent pour une quelconque valeur de p et le projet, qui a considérablement investi dans le cas $p = 2$, est concepteur d'un algorithme dont la convergence vers un *minimum local* est garantie et qui est le seul à jouir de cette propriété. Afin de globaliser ce résultat, ce qui serait une avancée algorithmique majeure dans le domaine, nous étudions le nombre et la nature des points critiques en nous concentrant, comme c'est l'usage en approximation, sur des types particuliers de fonctions qui ont valeur d'exemples en vue de dégager des classes de propriétés générales.

En conjuguant des techniques de théorie de Morse (stratifiée) avec des estimations analytiques, nous avions notamment fourni un théorème d'unicité (le premier du genre) pour des fonctions de Stieltjes (correspondant à des systèmes de relaxation) dont le support de la mesure reste compris dans un intervalle dont la longueur est bornée par une certaine constante absolue (ceci peut s'interpréter comme une contrainte de stabilité). Si on affaiblit la propriété d'unicité en celle d'unicité asymptotique (c'est–à–dire unicité pour un ordre d'approximation assez grand), cette borne sur le support a été améliorée lors d'un travail commun avec H. Stahl qui est en cours ; les ingrédients en sont, outre les aspects topologico-différentiels précédents, la détermination de la mesure limite associée aux pôles des points critiques (qui est la mesure d'équilibre d'un certain potentiel), une formule d'erreur due à V. Totik (provenant d'asymptotiques forts en poids variable pour des polynômes orthogonaux), et l'interprétation de la dérivée seconde comme un opérateur de Hankel pondéré qui permet de faire le lien avec la théorie classique de l'interpolation et AAK. Cette interprétation a été développée originellement en collaboration avec le professeur Saff dans le cadre d'une convention NSF-INRIA, et fournit le premier critère d'unicité un peu général pour ce style de problèmes. Il a été illustré sur trois exemples dans [177][4] et a fait l'objet de la communication [165]. Le premier de ces exemples est celui de la fonction exponentielle, qui est le prototype d'une fonction de transfert dont la réponse décroit régulièrement ; le second est un théorème du type Montessus de Ballore dans H^2, pour l'approximation de type (m, n) de fonctions méromorphes dans une couronne lorsque m devient grand, et qui permet de retrouver les pôles de la fonction comme en approximation de Padé, mais avec une propriété extrémale supplémentaire pour l'approximant ; le troisième exemple, enfin, concerne l'approximation H^2 sur un disque petit de fonctions dont la matrice de Toeplitz n'est pas dégénérée, et va servir à initialiser des algorithmes de continuation. En relation avec les estimées d'erreur nécessaires pour élucider le premier de ces exemples, un travail portant sur le comportement asymptotique des approximants de Hermite-Padé de la fonction exponentielle a fait l'objet d'une publication[5].

L'introduction d'une pondération en fréquence constitue un autre développement qui s'est intensifié cette année, autant pour la nécessité qu'il y a de pondérer les données expérimentales (par la densité spectrale du bruit dans un contexte stochastique c'est-à-dire pour relativiser le comportement du modèle là où on a peu d'information dans un langage moins savant mais plus universel) que pour les améliorations algorithmiques que l'on en espère. À ce sujet, il est intéressant de noter que la démarche

[4]et aussi L. Baratchart and E. B. Saff and F. Wielonsky, *A criterion for uniqueness of a critical point in H^2 rational approximation*, à paraître dans Journal d'Analyse.

[5]F. Wielonsky, *Asymptotics of diagonal Hermite–Padé approximants to e^z*, à paraître dans Journal of Approximation Theory.

la plus répandue pour l'identification fréquentielle dans la pratique de l'ingénieur consiste à poser une minimisation aux moindres carrés et à en pondérer les termes jusqu'à obtenir, si on le peut, un résultat convenable par les méthodes d'optimisation dont on dispose. C'est la théorie de cette pratique, afin d'en tirer une méthode, que l'on ambitionne de faire ici. On est donc conduit à minimiser un critère du type

$$\|f\|_{L^2(d\mu)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta),$$

où μ est une mesure positive finie sur T. Nous avons étendu certains des résultats obtenus en approximation au cas où le problème est :

$$\min \left\| f - \frac{p_m}{q_n} \right\|_{L^2(d\mu)}, \tag{4}$$

pour $f \in H^2$, où p_m est un polynôme de degré inférieur ou égal à m, et q_n un polynôme monique de degré inférieur ou égal à n sans racines dans le disque unité.

Pour qu'un tel problème (m, n) soit bien posé, il faut que μ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de dérivée inversible dans L^∞ ; nous avons considéré pour l'instant le cas où cette dérivée est de la forme $1/|w|^2$ pour un polynôme w de degré d. Lorsque $m = n - 1$, on peut construire explicitement une base de polynômes orthogonaux associés à la mesure μ et relier les solutions du problème (4) à celles d'un problème non pondéré. L'algorithme de recherche des minima locaux mis au point dans le cas non pondéré, fondé sur des méthodes de gradient et de quasi-Newton sur une variété compacte qui exhibe une structure récursive par rapport au degré de l'approximant, se généralise alors au cas pondéré. Ces résultats ont été rassemblés dans [178] et ont fait l'objet d'une soumission pour publication à MCSS ainsi que d'une proposition de communication à ECC 97. Lorsque le poids est défini par un polynôme w de degré 1, les solutions sont données par un changement de variables relativement simple à partir de celles du problème sans poids ; un tel poids accroit l'importance des fréquences autour de 0 ou de π et peut être utile lorsqu'on dispose de données dans une telle bande de fréquences ; ceci a fait l'objet des stages de F. Viry et F. Maurin.

Dans le cadre de notre collaboration NSF–Inria, nous avons aussi abordé cette année l'étude de (4) pour $m \leq n + d - 1$ (le cas $m > n + d - 1$ se ramenant à celui où les approximants sont du type $(n+d-1, n)$ comme cela est décrit pour le problème sans poids dans l'article à paraître[6]). Le but de ce travail est d'étendre à (4) certains résultats connus dans le cas non pondéré. En particulier, nous avons établi la normalité (tous les q_n solutions de (4) sont de degré égal à n sauf si f est une fraction dont le dénominateur est de degré strictement inférieur à n) et avons commencé l'étude de la "consistance" (unicité du point critique lorsque f est elle–même rationnelle de type (m, n)) ; nous avons prouvé cette dernière propriété pour $m = n + d - 1$ et $m = n + d - 2$. Nous projetons, d'une part, de généraliser au cas $m \leq n + d - 1$ l'algorithme de recherche des minima évoqué ci–dessus disponible à ce stade pour $m = n - 1$ et, d'autre part, d'étudier un certain nombre de questions théoriques (propriétés asymptotiques des points critiques, relations avec les problèmes d'interpolation) en se servant du poids comme d'un paramètre de conception pour l'algorithme. Par exemple, dans le cas $m \geq n - 1$, il est clair que les considérations de théorie de Morse sur les points critiques seront encore vraies dans le cas pondéré et le problème de savoir si l'on peut choisir le poids de sorte que l'on ait unicité, (version peu classique de l'*input design*) devient fort intéressant.

[6] L. Baratchart and E. B. Saff and F. Wielonsky, *A criterion for uniqueness of a critical point in H^2 rational approximation*, à paraître dans Journal d'Analyse.

3.1.5 Application à l'annulation d'écho

Participants : Laurent Baratchart, Marc Bordier (CMA École des Mines de Paris, Sophia Antipolis), Juliette Leblond, Jean-Paul Marmorat (CMA École des Mines de Paris, Sophia Antipolis), Fabien Seyfert

Mots-clés : contrôle actif d'écho.

L'objet de cette application, associée à la bourse DRET dont bénéficie F. Seyfert, est la faisabilité du contrôle actif de l'écho d'un sous-marin en minimisant l'énergie de l'onde sonore réfléchie. Ce phénomène a été modélisé par le CMA de l'ENSMP sous forme d'un système dynamique linéaire stationnaire causal et stable de dimension infinie. L'identification rationnelle scalaire H^2 des différentes composantes ondes-capteurs a été effectuée à partir de données fréquentielles obtenues par simulations numériques et donne, pour des ordres assez élevés, des résultats satisfaisants (logiciel *hyperion*, voir section 3.1.7). Cependant, la présence d'un retard (délai de transmission) est intrinsèque à ce problème et suggère la mise au point d'une procédure d'identification qui permette de découpler la partie rationnelle du transfert de celle purement retardée. Ceci rejoint les considérations faites en sections 3.1.1 et 3.1.8.

3.1.6 Approximation rationnelle matricielle

Participants : Laurent Baratchart, Andrea Gombani (CNR Padoue, It.), Martine Olivi, José Grimm (Projet SAFIR)

Mots-clés : approximation rationnelle, matrice intérieure, espace à noyau reproduisant, théorie de la réalisation.

L'approximation matricielle est indispensable pour traiter de systèmes à plusieurs entrées et sorties (bizarrement appelés multivariables) et engendre des difficultés additionnelles substantielles au plan théorique et algorithmique. Le problème est un analogue du cas scalaire où le degré de McMillan généralise le degré : *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{F} \in (H^p)^{m\times l}$ *et* n *un entier ; on cherche une matrice rationnelle de taille* $m \times l$ *sans pôles dans le disque unité et de degré de McMillan au plus* n *qui soit la plus proche possible de* $\mathcal{F}$ *dans* $(H^p)^{m\times l}$.

Ici, la norme L^p d'une matrice est la racine p-ième de la somme des puissances p-ièmes des normes de ses composantes.

Rappelons que l'algorithme d'approximation H^2 scalaire mis au point ces dernières années a été généralisé au cas matriciel. Le problème majeur rencontré dans cette extension réside dans la représentation des matrices de degré de McMillan donné. Le facteur intérieur dans la factorisation de Douglas-Shapiro-Shields, qui remplace le dénominateur du cas scalaire, varie alors non plus dans un ouvert de R^n, mais dans une variété. Cette structure autorise la mise en œuvre des outils différentiels utilisés dans le cas scalaire. En pratique, il faut exhiber un atlas de cartes (paramétrages valables dans un voisinage donné d'un point) satisfaisant pour l'application que l'on a en vue. L'algorithme de Schur tangentiel nous a fourni de tels paramétrages et a permis l'implémentation d'un algorithme d'approximation rationnelle. Celle-ci est intégrée au logiciel *hyperion* qui a été testé sur des données matricielles 2×2 provenant d'expérimentations du CNES, dans le cadre du contrat qui fait l'objet du paragraphe 3.1.8 et donne à l'ordre 8 des résultats d'une grande qualité. Ceci-dit, un point-clé reste à élucider : le choix le plus efficace de la carte ou paramétrage local en un point donné ; ce choix influe de façon déterminante sur le conditionnement numérique des calculs et par là sur la taille des problèmes que l'on peut traiter.

Un paramétrage alternatif est par ailleurs à l'étude en collaboration avec A. Gombani. Il s'agit d'utiliser comme cartes certaines représentations d'état qui sont populaires chez les automaticiens. Le critère et le gradient s'expriment de façon simple en termes de réalisation en faisant intervenir le grammien d'observabilité. Les calculs se généralisent aisément au cas d'une approximation pondérée, ce qui contribue à leur donner de l'intérêt. Ces résultats ont fait l'objet de [168]. Dans le cas scalaire, un algorithme a été implémenté en Matlab dans le cadre du stage de N. Bergevin. Il utilise la forme canonique dite de Schwartz (aussi prônée dans ce contexte par Hanzon et Maciejowski) pour laquelle le grammien d'observabilité est égal à l'identité. D'autres formes canoniques d'état sont aussi à l'étude, en particulier celles obtenues à partir des paramétrages de Schur.

3.1.7 Développement du logiciel *hyperion*

Participants : Julien Calm, José Grimm (Projet SAFIR), Fabien Seyfert, Franck Wielonsky

Mots-clés : web, interface graphique.

Nous avons étendu l'algorithme de complétion analytique H^2 d'une fonction de transfert, en incluant le cas où la fonction recherchée est dans un espace de Hardy–Sobolev, voir section 3.1.1. L'algorithme a été testé sur des données de filtres hyperfréquences fournies par le CNES, et permet de retrouver efficacement la valeur à l'infini de la fonction. L'algorithme scalaire d'approximation rationnelle avec poids est, quant à lui, en cours d'implémentation, voir [178] et section 3.1.4.

L'approximation rationnelle consiste à minimiser une certaine fonction ψ, par rapport à un dénominateur q dans le cas scalaire, ou par rapport aux paramètres de Schur dans une certaine carte du facteur intérieur Q dans le cas matriciel ; l'obtention du numérateur est la partie facile de l'algorithme. C'est le calcul de la Hessienne (dérivée seconde de ψ) qui prend le plus de temps. Nous avons implémenté un algorithme de Quasi-Newton pour réduire ce facteur, mais nous n'avons pas encore trouvé de jeu de paramètres qui rende ce nouvel algorithme nettement plus efficace dans le cas où les conditions initiales sont choisies loin de l'optimum, cas où il est conseillé et même peut-être nécessaire de changer de carte au cours de la minimisation.

D'autre part, une interface d'*hyperion* a été réalisée. Les deux fonctions de base de *hyperion*, complétion H^2 et approximation rationnelle, prennent en argument un grand nombre de paramètres (de l'ordre de la trentaine). Nous avons défini une première interface, dans laquelle l'utilisateur écrit simplement *variable = valeur*, pour toutes les variables pour lesquelles la valeur par défaut de la variable ne lui convient pas. Dans le cas matriciel, certaines variables doivent avoir une valeur x_{ij} pour tout i et j. Il est possible de positionner x_{ij} globalement, quitte ensuite à modifier certaines valeurs de x. On peut aussi inclure un fichier, ce qui permet, par exemple, de changer les valeurs par défaut. Les commandes utilisateur sont traduites en Lisp par l'interface, et écrites dans deux fichiers, l'un pour la complétion, l'autre pour l'approximation rationnelle (l'utilisateur peut demander à ce que certains paramètres utilisés par l'approximation soient calculés par la fonction de complétion analytique). Une deuxième interface, graphique celle-ci, réalisée en *motif* au dessus de X-windows a été réalisée par J. Calm. L'un des avantages est l'aide en ligne, qui explique chaque variable, et les tests de types : les paramètres booléens sont représentés par des boutons poussoirs, les entiers entre 1 et N par des curseurs, etc.

3.1.8 Application à l'identification de filtres hyperfréquences

Participants : Laurent Baratchart, José Grimm (Projet SAFIR), Juliette Leblond, Martine Olivi, Fabien Seyfert, Franck Wielonsky

Mots-clés : approximation, identification.

Une convention de recherche, passée avec le CNES (centre de Toulouse) et qui implique aussi le projet SAFIR de l'Inria, porte sur l'identification de cavités hyperfréquences bimodes. Elle nous a permis de tester sur des données industrielles les algorithmes élaborés à partir de la théorie évoquée ci-dessus. Le problème posé par le CNES est le réglage d'un filtre passe-bande aux alentours de 11Ghz, dont l'usinage forcément imprécis a dégradé la fonction. Les données sont obtenues dans une bande de fréquence d'une largeur de 80 Mhz à l'aide d'un vobuloscope, et sont assimilées à un transfert rationnel de degré 8 auquel se superpose un retard (dû à la longueur des conducteurs et vu la fréquence à laquelle on travaille). La convention de recherche avec le CNES avait pour but l'identification d'un de ces filtres, étape nécessaire pour le réglage. Le CNES compensant lui-même le retard, notre rôle était borné à l'identification du facteur rationnel. Pour cela, nous avons effectué sur les données une extension analytique de type L^2 comme décrit en section 3.1.1, puis appliqué au modèle de dimension infinie (numériquement 400 environ) l'algorithme d'approximation rationnelle H^2 en degré 8 (section

3.1.6). Lors d'une première expérimentation au CNES, le retard était mal compensé de sorte que les oscillations aux hautes fréquences (détectées par la complétion analytique) ne permettaient pas de déterminer précisément la valeur à l'infini. Le CNES a donc procédé à une deuxième expérimentation qui, cette fois, nous a permis d'obtenir un modèle très fidèle et nettement supérieur à ce que les techniques d'optimisation généralistes utilisées jusqu'ici pouvaient fournir.

Cette étude a permis à la fois de valider les algorithmes d'approximation développés dans le projet en collaboration avec J. Grimm, et de poser clairement le problème de la détermination du retard que le CNES aimerait résoudre de manière générique notamment lorsqu'il s'agit d'exemplaires très déréglés de filtres pour lesquels les considérations de symétrie usuelles ne sont pas valables.

Une nouvelle convention a donc été signée qui porte sur la détermination du retard et de la valeur à l'infini, ce qui peut être vu comme un problème d'approximation par un facteur singulier *fois* une matrice rationnelle. Ce problème est nouveau, et intéressant. Notons que le CNES achète, lors de cette convention, le droit d'utiliser le logiciel Hyperion.

Le projet commence aussi à explorer par avance la phase de réglage des filtres qui devrait constituer le troisième volet de la collaboration avec le CNES. Le stage de Nicolas Otto-Loyas a eu pour objet l'écriture d'un code MAPLE calculant formellement une réalisation de la matrice S d'un filtre idéal en fonction des analogues électriques du réseau passe-bas associé. Ces travaux sont actuellement repris par F. Seyfert.

3.1.9 Consistance en identification paramétrique

Participants : Laurent Baratchart, Martine Olivi

Mots-clés : approximation rationnelle, identification paramétrique, structure topologique des matrices rationnelles, étude des points critiques, pôle et zéro d'une matrice rationnelle.

L'étude de la consistance de la minimisation de l'erreur de prédiction en identification paramétrique de systèmes linéaires est présente depuis deux ans dans le projet comme domaine d'application naturel des avancées réalisées en approximation rationnelle et comme vecteur naturel de publicité pour celles-ci auprès d'une communauté ayant une longue tradition scientifique en identification. En particulier, on vise à obtenir des énoncés généraux et même, si possible, définitifs sur certaines questions classiques, tout en sachant que cela influera sans doute peu sur la pratique dans ce domaine.

Le contexte de ce travail est ultra–classique : étant donné un processus discret $y(t)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$, et un autre processus $u(t)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ que l'on tient pour la *cause mesurable* du phénomène qui se manifeste par $y(t)$, on cherche pour décrire ledit phénomène à ajuster un modèle linéaire :

$$\hat{y}(t) = Hu(t) + Le(t),$$

où e est un bruit blanc décorrélé de u censé représenter les aléas qui concourent à créer $y(t)$, et L une fonction de transfert inversible et d'inverse stable (c'est–à–dire que parmi les bruits de même covariance et d'innovation donnée, on choisit celui dont la fonction de transfert est de phase minimale) ; notons qu'une telle représentation est générale si $y(t)$ et $u(t)$ sont des processus stationnaires *réguliers* (c'est–à–dire purement non-déterministes en un certain sens). Si on choisit la norme de l'erreur linéaire de prédiction comme mesure de la qualité du modèle, on cherche en conséquence une matrice rationnelle (H_N, L_N) de taille $p \times (m+p)$ et de degré de McMillan n qui minimise, pour un échantillon de longueur N, l'estimateur empirique de la variance :

$$\mathcal{E}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left\| L^{-1} y_t - L^{-1} H u_t \right\|^2 .$$

Un résultat de consistance est alors, par définition, un théorème affirmant, sous certaines conditions, que la suite (H_N, L_N) s'accumule, lorsque N croît, près d'un minimiseur de la « vraie » variance :

$$\mathbf{E}\left\{ \|L^{-1}y(t) - L^{-1}Hu(t)\|^2 \right\}.$$

En particulier, on reconstruit le « vrai » modèle s'il est de la forme prescrite. De tels résultats sont disponibles dans la littérature, et pour des critères un peu plus généraux, sous des hypothèses d'ergodicité ou de stabilité exponentielle de (u, y), mais ils requièrent généralement que la classe de modèles soit compacte, ce qui est gênant dans la mesure où l'on voudrait que certaines caractéristiques dynamiques comme les pôles soient déterminées par les données et non pas un *artefact* de la classe choisie, ou encore que le « vrai » système appartienne à cette classe de modèles, ce qui est peu réaliste. Une exception notable est constituée par les résultats de Hannan et Deistler[7], qui prouvent la consistance, non pas de la minimisation de l'erreur de prédiction mais de la maximisation de la vraisemblance, sous des hypothèses d'ergodicité faible, d'excitation persistante, et de régularité des processus.

Nous avions prouvé l'an passé, également sous des hypothèses faibles d'ergodicité et de persistance d'excitation, que la minimisation de la forme empirique de l'erreur de prédiction est du même type (nature et nombre des points critiques) que celle de la variance l'erreur de prédiction elle-même, fondant ainsi le lien avec l'approximation rationnelle étudiée par ailleurs dans le projet. En particulier, les résultats de [176] [8] entraînaient dans le cas où $L = Id$ (identification dite *d'erreur de sortie*) que le minimiseur de $\mathcal{E}_N$ est presque sûrement l'unique point critique, asymptotiquement sur tout compact, lorsque la densité de y par rapport à u est presque rationnelle de degré n.

Cette année, nous avons essentiellement affaibli les hypothèses du résultat précédent en traitant le cas ergodique en moyenne et obtenu au passage un théorème de consistance sans hypothèse de compacité pour la minimisation de la variance de l'erreur de prédiction à variance du bruit fixée, qui peut être considéré comme uneversion un peu généralisée du résultat de Hannan et Deistler. La rédaction de ce travail est en cours, ainsi qu'une collaboration avec M. Deistler et E. Saff, pour tâcher d'étendre ces propriétés à l'estimateur du maximum de vraisemblance.

3.2 Structure et commande des systèmes non-linéaires

Cette activité comprend deux aspects : stabilisation des systèmes non-linéaires par retour d'état ou de sortie, et transformations des systèmes non-linéaires par retour d'état statique ou dynamique.

3.2.1 Stabilisation périodique de systèmes non-linéaires, application aux systèmes mécaniques non-holonomes

Participants : Pascal Morin (Projet ICARE), Jean-Baptiste Pomet, Claude Samson (Projet ICARE), Zhong-Ping Jiang (univ. Sydney)

Mots-clés : commande, stabilisation de système non linéaire, automatique non linéaire, système mécanique non holonome.

Il s'agit d'une part de développer de nouvelles méthodes de synthèse de lois de contrôle non-linéaires stabilisantes instationnaires, c'est-à-dire ayant la particularité de dépendre explicitement du temps, ce qui permet la construction de lois de commande continues pour des systèmes qui n'admettent pas de lois de commande stabilisantes continues stationnaires, et d'autre part de rendre effectifs ces résultats en les appliquant à des systèmes mécaniques.

Le principal résultat de cette année est une méthode de construction de loi de commande stabilisante, pour un système sans dérive, qui ne dépend que de la structure de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteur de commande du système [171]. Un avantage est que l'obtention de la loi est complètement explicite, algébrique si les équations du système sont algébriques. L'idée est d'adapter des méthodes ayant permis d'approcher des trajectoires d'un système « étendu » (où l'on rajoute des commandes fictives dans les directions des crochets de Lie) par des trajectoires du système réel, grâce à des commandes oscillantes. L'adaptation de ces méthodes en boucle ouverte à la synthèse de lois de compensation est assez délicate, bien que ce soit *a priori* l'idée la plus naturelle pour obtenir des

[7] The Statistical Theory of Linear Systems, Wiley, 1988, Chap. 7, par. 4

[8] également à paraître dans *Constructive Approximation*

lois de commande stabilisantes instationnaires. Il est à noter que l'on obtient des lois de commande homogènes, et donc une stabilisation locale exponentielle. De plus l'homogénéité joue un grand rôle dans la possibilité d'adapter ces méthodes en boucle fermée.

Les applications concernent pour l'instant les systèmes mécaniques non-holonomes. On s'est intéressé à de nombreux systèmes intervenant en robotique mobile. On a également résolu le problème de la stabilisation de l'attitude d'un corps solide non complètement commandé en rotation autour de son centre de gravité (un satellite artificiel en mode dégradé par exemple).

Les efforts récents ont consisté à étudier et améliorer la vitesse de convergence, par exemple en obtenant un taux exponentiel à l'aide de lois de commande homogènes. Ces travaux sont exposés dans la thèse de P. Morin (voir rapport d'activité du projet ICARE).

Un effort particulier doit être consenti maintenant pour rendre ces lois robustes aux incertitudes du système. La publication [164], par exemple, concerne la commande de robots mobiles en présence de paramètres inconnus.

3.2.2 Transformations par retour d'état statique ou dynamique des systèmes non-linéaires

Participants : Jean-Baptiste Pomet, Claire Leleu

Mots-clés : automatique non linéaire, feedback non linéaire.

Une transformation par *retour d'état statique* d'un système dynamique contrôlé est une reparamétrisation (non singulière) des commandes, dépendant de l'état. Une transformation par *retour d'état dynamique* d'un système dynamique contrôlé consiste à effectuer une extension dynamique (augmentation de l'état et attribution d'une dynamique aux nouveaux états) suivie d'une transformation par retour d'état statique sur le système augmenté. Du point de vue des problèmes de commande, l'intérêt de telles transformations, dans le cas où le système obtenu possède une structure plus exploitable que l'original, est qu'une commande permettant de satisfaire un certain objectif sur le système transformé peut être utilisée pour commander le système original en incluant l'extension dynamique dans le contrôleur.

Évidemment, un cas favorable est celui où le système transformé est linéaire. Le problème de la linéarisation dynamique est celui de trouver des conditions explicites sur un système pour qu'existe une transformation par retour d'état dynamique le rendant linéaire. Ce problème a été très étudié ces dix dernières années. Des travaux récents (M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon) ont montré qu'un feedback dynamique linéarisant existe si et seulement si il existe un certain nombre de fonctions de l'état et de dérivées de la commande qui ne sont liées par aucune équation différentielle, et qui « paramètrent toutes les trajectoires ». Cette propriété est appelée *platitude différentielle*, et les fonctions en question *fonctions linéarisantes* (ou *sorties plates*). Ceci donne un intérêt nouveau au problème, car ces fonctions permettent de simplifier certains problèmes comme la planification de trajectoires. C'est aussi une manière plus systématique de s'attaquer au problème de la linéarisation dynamique : rechercher des fonctions linéarisantes (et des conditions qui assurent leur existence).

Une collaboration avec le Laboratoire d'Automatique de Nantes avait permis de mettre en évidence, sous le nom de *forme de Brunovský infinitésimale*, l'existence de formes différentielles, non forcément intégrables, qui vérifient exactement la propriété que l'on attend des différentielles des fonctions linéarisantes lorsqu'elles existent, hormis qu'elles ne fournissent pas de fonctions si elles ne sont pas intégrables. Cela permet de formuler la recherche de sorties linéarisantes comme celle de transformations sur les familles de formes différentielles qui préservent ces propriétés et, de plus, les rendent intégrables. Un cadre de géométrie différentielle de dimension infinie (espaces de jets infinis) a été développé pour rendre plus géométriques les notions de feedback dynamique et de fonctions linéarisantes[9].

[9] Voir : Jean-Baptiste Pomet, *A Differential Geometric Setting for Dynamic Equivalence and Dynamic Linearization*, et Eduardo Aranda-Bricaire, Claude Moog, Jean-Baptiste Pomet, *An Infinitesimal Brunovsky Form for Nonlinear Systems with Applications to Dynamic Linearization*, respectivement pages 19–33 et pages 319–339 de B, Jakubczyk, W. Respondek et T. Rzezuchowski éditeurs, *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions*, *Banach Center Publications*, vol. 32, Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1995.

Cette approche a été utilisée pour traiter le cas des systèmes dans $\mathbf{R}^4$ (état de dimension 4) à deux commandes, avec une dynamique affine en ces commandes (ce sont les premières dimensions non triviales). On parvient ainsi à donner des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de fonctions linéarisantes dépendant de l'état et de la commande [10].

Il est à noter que, dans les preuves de ces conditions, on est amené à utiliser un logiciel de calcul formel (Maple) pour conduire les calculs. Ceci a été souligné dans la communication [174].

Le stage de Maîtrise de Claire Leleu avait pour objet l'écriture d'un package Maple destiné à tester les conditions obtenues.

3.3 Jeux dynamiques

3.3.1 Calcul numérique de la fonction valeur d'un jeu différentiel en information parfaite

Participants : Stéphane Crepey, Odile Pourtallier, Pierre Bernhard

Mots-clés : jeu dynamique, contrôle optimal, méthode numérique.

On a poursuivi l'étude des méthodes de calcul numérique de la solution des jeux de poursuite–évasion. On s'est plus particulièrement concentré sur les cas où la fonction valeur présente des singularités (discontinuité de V ou de son gradient). Dans ce cas, des résultats dus à M. Bardi et P. Soravia montrent qu'une adaptation des algorithmes que nous avons développés converge vers la solution du problème. Néanmoins, la localisation des singularités reste imprécise. Pour l'améliorer, un mini-logiciel a été réalisé afin de mieux comprendre le comportement des schémas d'approximation au voisinage des zones de discontinuité. Au plan de l'exploitation des résultats numériques l'étape suivante consistera à adapter des algorithmes issus de l'imagerie médicale (INRIA Sophia, projet Epidaure) pour reconstituer les singularités de V à partir des données discrétisées renvoyées par l'algorithme de calcul de la fonction valeur. Il s'agit ici de repérer des discontinuités mais aussi des crêtes, à partir d'une fonction connue uniquement sur un maillage discret.

Au plan théorique, on a cherché des conditions de régularité sur V assurant la convergence locale des schémas d'approximation.

3.3.2 Jeux à N joueurs

Participants : Stéphane Crepey, Alain Haurie (HEC, univ. Genève, Suisse), Odile Pourtallier

Mots-clés : jeu dynamique, contrôle optimal, commande quadratique, modélisation en économie, méthode numérique.

Durant la visite d'A. Haurie, on a abordé l'étude d'algorithmes de calcul des équilibres de Nash pour un jeu différentiel à N joueurs. La mise au point de tels algorithmes répond en particulier à un besoin des économistes, qui ont tendance aujourd'hui à introduire des modèles dynamiques prenant en compte plusieurs agents. Dans le cas linéaire quadratique, où nous nous sommes placés pour l'instant, le problème revient à résoudre des systèmes d'équations de Riccati couplées. Des algorithmes ont été testés numériquement et semblent, sous des hypothèses convenables, converger vers la solution.

3.4 Divers

3.4.1 Modélisation d'entreprises

Participants : Juliette Leblond, Jean-Baptiste Pomet, Philippe Dulbecco (ECT, CNRS), Jean-Luc Gaffard (LATAPSES, CNRS),

Mots-clés : modélisation de système dynamique, modélisation en économie, logiciel numérique.

[10] Jean-Baptiste Pomet, *On Dynamic Feedback Linearization of Four-dimensional Affine Control Systems with Two Inputs*, à paraître dans Europ. S.A.I.M. C.O.C.V.

Il s'agit de modélisation d'agents économiques dans leur marché. Nous nous sommes attachés à décrire certains objectifs possibles des dirigeants de ces entreprises (volonté d'innovation et évolution du processus de fabrication du produit, volonté de rentabilité à court terme, comportements « sticker » et « snatcher »), et à modéliser le comportement-type associé. Les entreprises sont modélisées par des systèmes discrets, non-linéaires et d'ordre élevé. Nous avons abordé le cas de deux firmes concurrentes sur le même marché, qui consiste à interconnecter de tels systèmes ayant des caractéristiques semblables ou opposées.

L'implémentation de ces modèles sera poursuivie dans le but de comparer leurs différentes aptitudes et leur viabilité selon le marché (*cf* section 4.2).

4 Actions industrielles

4.1 Identification

Participants : Laurent Baratchart, José Grimm (Projet SAFIR), Juliette Leblond, Martine Olivi, Fabien Seyfert, Franck Wielonsky

Convention d'étude n^o 1/96/E/576/00/41604/13/1 avec le CNES Toulouse portant sur l'étude de filtres hyperfréquences à cavités bimodes et la réalisation d'un logiciel spécifique d'identification multivariable, voir section 3.1.8.

4.2 Modélisation

Participants : Juliette Leblond, Jean-Baptiste Pomet

Conventions de recherche n^o (1 à 3)/96/500634 avec le LATAPSES–CNRS, portant sur la modélisation dynamique d'entreprises, voir section 3.4.1.

4.3 Jeux différentiels

Participants : Pierre Bernhard, Bertrand Neveu (Projet SECOIA), Odile Pourtallier

L'Inria est sous–traitant de Thomson-CSF/Application radar sur un marché DRET (95-34-510) intitulé « Théorie des jeux en guerre électronique ». Ce marché fait aussi intervenir la société AERO.

P. Bernhard et B. Neveu ont poursuivi leur contrat de conseil avec MATRA Défense. Dans ce cadre, P. Bernhard a donné un cours de théorie des jeux dynamiques dans les locaux de la société MATRA Défense.

5 Actions nationales et internationales

5.1 Actions internationales

Jean-Baptiste Pomet est éditeur associé de la revue *IEEE Transactions on Automatic Control*.

Une convention NSF-Inria portant sur la collaboration avec E.B. Saff, V. Totik et E. Rachmanov du *Center for Constructive Approximation* à Tampa (USA), ainsi qu'avec W. Helton de l'université de San Diego (USA) est en cours ; elle porte sur l'utilisation de la théorie de l'approximation en traitement du signal et en identification.

Dans le cadre du programme Arc-en-Ciel, une convention de coopération avec D. Alpay de l'université Ben–Gurion à Beer Sheva (Israël), V. Vinnikov de l'institut Weizmann à Rehovot (Israël) et P. Loubaton de l'université de Marne la Vallée a été signée ; elle porte sur de nouvelles approches pour l'étude des systèmes périodiques et l'étude des systèmes 2D.

5.2 Actions européennes

P. Bernhard est membre de l'*Advisory Council* de IWI (*Research Institute of Mathematics and Computing Sciences*, université de Gröningen, Pays-Bas).
Il a également participé à la 7ème école d'automne franco-espagnole sur la simulation numérique en physique et en ingénierie (Oviedo, 23-27 septembre 1996), où il a donné un cours intitulé « Introduction à la commande robuste H^∞ ».

5.3 Actions nationales

L. Baratchart a organisé le Séminaire d'Evaluation du programme 5 de l'INRIA à Dourdan en février, ainsi que les rencontres INRIA–Industrie à Paris en novembre.

P. Berhnard est membre du Conseil Scientifique de l'ENPC, du Conseil d'évaluation des recherches des Écoles des Mines et de la Commission Aval de l'École Polytechnique.

J. Leblond est membre suppléant de la Commission d'Evaluation de l'INRIA.

J.-B. Pomet participe aux réunions du GDR Automatique, pôle « non–linéaire ».

5.3.1 Organisation de séminaires

Jean-Baptiste Pomet organise un séminaire « Commande et Identification » dont l'assistance regroupe des chercheurs sur ce thème à l'Inria, au CMA (École des Mines de Paris) et à l'I3S (CNRS).

6 Diffusion des résultats

6.1 Formation

6.1.1 Enseignement universitaire

P. Bernhard est maître de conférences d'exercice partiel à l'École Polytechnique. Dans ce cadre, il a notamment donné un cours de commande robuste (12 h). Il a également assuré un cours de commande optimale linéaire quadratique à l'ISIA (15 h). Voir aussi la section 4.3 pour un cours donné chez un industriel. Rappellons que P. Bernhard est à présent professeur à l'université de Nice.

L. Baratchart et J.–B. Pomet sont responsables des modules « Méthodes H^∞ » (15 h) et « Introduction à l'automatique non–linéaire » (15 h) de la filière SAR du DEA « ARAVIS ». J. Leblond a participé à l'enseignement des modules « Identification » (15 h, 1995–96), « Automatique linéaire » (15 h, 1995–96) et « Méthodes H^∞ » (15 h, 1996–97).

L. Baratchart et J. Leblond ont assuré un cours « Problèmes extrémaux dans H_∞ et contrôle des équations de convolution » dans le cadre du DEA de Mathématiques de l'université de Nice–Sophia Antipolis (20 h 1996–97).

6.1.2 Thèses

– Thèses en cours :

1. S. Crepey, « Sur les méthodes numériques pour la résolution de l'EDP d'Isaacs-Jacobi-Bellman associée au contrôle optimal et aux jeux dynamiques à deux joueurs », École Polytechnique.
2. F. Seyfert, « Identification fréquentielle de systèmes de dimension infinie », École des Mines de Paris.

– Les membres du projet ont participé à 2 jurys de thèse.

6.1.3 Stages

Stages de Maîtrise, IUP GMI, université Paris Dauphine :

– N. Bergevin, « Identification de fonctions de transfert : paramétrisation dans l'espace d'état » (4 mois).

– J. Calm, « Interfaçage de saisie des paramètres d'un logiciel mathématiques » (4 mois).

– C. Leleu, « Une procédure pour tester les conditions de linéarisation dynamique d'un système non-linéaire de petites dimensions à l'aide d'un système de calcul formel » (4 mois).

– F. Maurin, « Identification de fonctions de transfert : choix de pondérations » (4 mois).

Stages de DEA ARAVIS, UNSA :

– N. Otto–Loyas, « Identification de filtres hyperfréquences » (4,5 mois).

– F. Viry, « Identification de fonctions de transfert : choix de pondérations » (4,5 mois).

6.2 Participation aux manifestations

L. Baratchart a présenté les activités du projet au Séminaire d'évaluation du programme 5, 22–23 février, Dourdan, auquel se sont rendus J. Leblond, M. Olivi, O. Pourtallier et F. Wielonsky. J. Grimm y a effectué une démonstration de *hyperion*.

L. Baratchart a présenté les activités du projet à la journée Inria-Industrie du 7 novembre, à Paris, J. Grimm y a effectué une démonstration de *hyperion* et F. Seyfert y a participé.

L. Baratchart et J.–B. Pomet ont fait des présentations au 2^{me} Workshop ERCIM *Systems and Control*, 26–27 août, Prague, République Tchèque.

L. Baratchart a présenté une communication au Workshop ERNSI, 22–25 septembre, Cambridge, U.K.

M. Olivi, J.–B. Pomet, F. Seyfert et F. Wielonsky ont présenté des exposés au MTNS 96, 24–28 juin, Saint–Louis, Missouri, USA ; A. Gombani et J. Leblond y ont organisé trois sessions invitées.

J.-B. Pomet a présenté un exposé au congrès mondial IFAC, 1–5 juillet 1996, à San Francisco (USA).

O. Pourtallier a présenté un exposé à l'International Symposium on Dynamic Games and Applications, 15–18 décembre 96, Shonan village (Japan).

6.3 Activités extérieures

Dans le cadre de la convention NSF-Inria, L. Baratchart, J. Leblond et F. Wielonsky ont effectué des séjours de trois, deux et cinq semaines au *Center for Constructive Approximation* à Tampa (USA).

L. Baratchart et J. Leblond se sont rendus pour quelques jours en septembre à l'université de Leeds (U.K.).

O. Pourtallier est en visite régulière à l'université de Genève (HEC) où elle collabore avec Alain Haurie sur des méthodes numériques pour les jeux à somme non nulle.

J.-B. Pomet a passé quelques jours et donné des exposés au Département « Contrôle et systèmes dynamiques » du California Institute of Technology à Pasadena (Californie, USA) ainsi qu'à Queen's university à Kingston (Canada).

F. Seyfert s'est rendu une semaine en juillet à UCSD, à San Diego (USA).

6.4 Divers

La version 0.49 du logiciel *hyperion* a été déposée à l'APP (Agence pour la Protection des Programmes) en novembre.

7 Publications

Articles et chapitres de livre

[160] L. BARATCHART, J. LEBLOND, J. PARTINGTON, «Hardy approximation to L^∞ functions on subsets of the circle», *Constructive Approximation 12*, 1996, p. 423–435.

[161] P. BERNHARD, A. RAPAPORT, «Min-max certainty equivalence principle and differential games», *International journal of robust and nonlinear control 6*, 1996.

[162] P. BERNHARD, «A separation theorem for expected value and feared value discrete time control», *COCV 1*, juillet 1996.

[163] Z.-P. JIANG, I. M. MAREELS, J.-B. POMET, «Output Feedback Global Stabilization for a Class of Nonlinear Systems with Unmodeled Dynamics», *European Journal of Control 2*, 1996.

[164] Z.-P. JIANG, J.-B. POMET, «Global Stabilization of Parametric Chained-form Systems by Time-varying Dynamic Feedback», *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing 10*, 1996, p. 47–59.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[165] L. BARATCHART, E. B. SAFF, F. WIELONSKY, «On the decay of interpolation errors and uniqueness of H^2 rational approximants», *in : MTNS*, St Louis (USA), 1996.

[166] L. BARATCHART, F. SEYFERT, «An L^p analog to AAK theory», *in : MTNS*, St Louis (USA), 1996.

[167] L. BARATCHART, «Convergence of derivatives of the prediction error and consistency of local minimization of the output error», *in : MTNS*, St Louis (USA), 1996.

[168] A. GOMBANI, J. LEBLOND, M. OLIVI, «A state space approach for L^2 model reduction schemes», *in : MTNS*, St Louis (USA), 1996.

[169] Z.-P. JIANG, I. M. MAREELS, J.-B. POMET, «Remarks on Robust Control of Nonlinear Systems with input Unmodeled Dynamics», *in : 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1996.

[170] A. MELIKYAN, O. POURTALLIER, «Games with Several Pursuers and one Evader with Discrete Observations», *in : International symposium on dynamic games and applications*, Shonan village (Japan), décembre 1996.

[171] P. MORIN, J.-B. POMET, C. SAMSON, «A new method for the design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for driftless controllable systems», *in : MTNS*, St Louis (USA), juin 1996.

[172] M. OLIVI, P. FULCHERI, «Schur parameters and matrix rational H^2 approximation», *in : MTNS*, St Louis (USA), 1996.

[173] J.-B. POMET, «On the set of curves that may be approached by trajectories of a control affine system», *in : MTNS*, St Louis (USA), 1996.

[174] J.-B. POMET, «On the Use of Computer Algebra in the Proof of Conditions for Dynamic Feedback Linearization of Low Dimensional Nonlinear Systems», *in : IFAC World congress*, San Francisco (USA), 1996.

Rapports de recherche et publications internes

[175] L. BARATCHART, M. BERTHOD, L. POTTIER, «Optimization of positive generalized polynomials under l^p constraints», *Rapport de recherche n°2750*, INRIA, décembre 1995, http://www.inria.fr/RRRT/RR-2750.html.

[176] L. BARATCHART, M. OLIVI, «Critical points and error rank in best H^2 matrix rational approximation of fixed McMillan degree», *Rapport de recherche n°2970*, INRIA, 1996, http://www.inria.fr/RRRT/RR-2970.html.

[177] L. BARATCHART, E. B. SAFF, F. WIELONSKY, «A criterion for uniqueness of a critical point in H^2 rational approximation», *Rapport de recherche n°2869*, INRIA, 1996, http://www.inria.fr/RRRT/RR-2869.html.

[178] J. LEBLOND, M. OLIVI, «Weighted H^2 approximation of transfer functions», *Rapport de recherche n°2863*, INRIA, 1996, http://www.inria.fr/RRRT/RR-2863.html.

[179] J.-B. POMET, «On Dynamic Feedback Linearization of Four-dimensional Affine Control Systems with Two Inputs», *Rapport de recherche n°2751*, INRIA, décembre 1995, A paraître dans *C.O.C.V.*, http://www.inria.fr/RRRT/RR-2751.html.

[180] N. TORKHANI, «Robust interpolation and approximation for $A(D)$–functions on subsets of the circle», *Rapport de recherche n°2778*, INRIA, 1996, http://www.inria.fr/RRRT/RR-2778.html.

8 Abstract

The endeavour of the project is to develop constructive methods in the analysis and optimization of controlled dynamical systems. The main topics presently under investigation are :

- Approximation in the complex domain with applications to the identification and design of linear systems and filters.
  A typical identification problem that we study is: given estimates of a transfer function in a bandwith, we want to find a rational function of given Mac–Millan degree accounting for these data. This issue we approach in two steps:
  (i) a bounded extremal problem that solves for a stable but non–rational transfer function,
  (ii) a rational approximation problem with fixed Mac–Millan degree.

- Control and sructural properties of nonlinear dynamical systems:
  continuous nonlinear stabilization of certain classes of systems that cannot be stabilized, even locally, by linear controls, and study of transformations by dynamic feedback, aiming at obtention of simple normal forms, in particular linear.

- Dynamical games, optimal and robust control.