

*Projet miaou**Mathématiques et Informatique de  
l'Automatique et de l'Optimisation pour  
l'Utilisateur**Sophia Antipolis*

THÈME 4A



*R*apport  
*A*ctivité

2002



# Table des matières

<b>1. Composition de l'équipe</b>	<b>1</b>
<b>2. Présentation et objectifs généraux</b>	<b>1</b>
2.1.1. Axes de recherche	1
2.1.2. Relations internationales et industrielles	2
<b>3. Fondements scientifiques</b>	<b>2</b>
3.1. Identification et déconvolution	2
3.1.1. Approximation méromorphe à partir de conditions au bord incomplètes	4
3.1.2. Approximation rationnelle scalaire	7
3.1.3. Comportement asymptotique des pôles d'approximants méromorphes et problèmes inverses pour le Laplacien	9
3.1.4. Approximation rationnelle matricielle	10
3.1.5. Identification paramétrique linéaire	11
3.2. Structure et commande des systèmes non-linéaires	13
3.2.1. Stabilisation continue	13
3.2.1.1. Stabilisation périodique de systèmes non-linéaires.	14
3.2.1.2. Fonctions de Lyapunov contrôlées.	14
3.2.2. Transformations et équivalences des systèmes et modèles non-linéaires	14
3.2.2.1. Linéarisation dynamique.	15
3.2.2.2. Équivalence topologique	16
3.2.3. Structure de l'espace des trajectoires	16
3.3. Jeux	17
<b>4. Domaines d'application</b>	<b>17</b>
4.1. Introduction	17
4.2. Problèmes inverses géométriques pour le Laplacien	17
4.3. Identification et synthèse de systèmes résonnants	18
4.3.1. Synthèse de filtre à ondes de surface pour la téléphonie mobile	18
4.3.2. Identification de filtres hyperfréquences	20
4.4. Mécanique spatiale	23
4.5. Optique non-linéaire	24
4.6. Transformations et équivalence des systèmes non-linéaires	24
4.7. Jeux dynamiques et télécommunications	24
<b>5. Logiciels</b>	<b>25</b>
5.1. Le logiciel hyperion	25
5.2. Le logiciel Tralics	25
5.3. Le logiciel RARL2	25
5.4. Le logiciel RGC (Réalisation interne à géométrie contrainte)	26
5.5. PRESTO-HF : Une boîte à outil dédiée à l'identification de paramètres passe-bas pour les filtres hyperfréquences	26
<b>6. Résultats nouveaux</b>	<b>27</b>
6.1. Participation à la création du rapport d'activité	27
6.2. Traducteur Latex-XML	27
6.3. Paramètres de Schur et réalisations équilibrées	28
6.4. Approximation rationnelle et méromorphe	29
6.5. Comportement asymptotique de pôles	29
6.6. Problèmes extrémaux avec contraintes de gabarit ponctuelles	30
6.7. Problèmes inverses pour le Laplacien 2D et 3D	30
6.8. Application de la théorie des jeux dans les réseaux	31

---

6.9.	Linéarisation locales de systèmes commandés	31
6.10.	Contrôle d'un régénérateur tout-optique de signaux numériques	32
6.11.	Extension analytique à valeurs polynomiales	32
6.12.	Détermination exhaustive des paramètres de couplage correspondant à une matrice de répartition	
33		
6.13.	Approximation fréquentielle et conception d'OMUX	33
<b>7.</b>	<b>Contrats industriels</b>	<b>34</b>
7.1.	Contrat CNES-IRCOM-INRIA	34
7.2.	Contrat Alcatel Space (Toulouse)	34
7.3.	Contrat France Telecom R&D-INRIA	34
7.4.	Contrat Alcatel Space (Cannes)	34
7.5.	Contrat Alcatel CIT	35
<b>8.</b>	<b>Actions régionales, nationales et internationales</b>	<b>35</b>
8.1.	Comités Scientifiques	35
8.2.	Actions nationales	35
8.3.	Actions financées par la commission européenne	35
8.4.	Visites de chercheurs extérieurs	35
<b>9.</b>	<b>Diffusion des résultats</b>	<b>36</b>
9.1.	Enseignement universitaire	36
9.2.	Animation de la communauté scientifique	36
9.3.	Participation à des colloques, séminaires, invitations	37
<b>10.</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>37</b>

# 1. Composition de l'équipe

## Responsable scientifique

Laurent Baratchart [DR INRIA]

## Responsable permanent

Juliette Leblond [CR INRIA]

## Assistante de projet

France Limouzis [AI INRIA, à temps partiel dans le projet]

## Personnel INRIA

José Grimm [CR INRIA]

Martine Olivi [CR INRIA]

Jean-Baptiste Pomet [CR INRIA]

Odile Pourtallier [CR INRIA, à mi-temps dans le projet]

Fabien Seyfert [CR INRIA]

Franck Wielonsky [IR, détaché à l'Université des Sciences et Technologies de Lille]

## Chercheurs doctorants

David Avanesoff [Bourse INRIA]

Andreï Ivanov [Bourse INRIA, jusqu'à octobre]

Reinhold Küstner [Bourse TMR]

Imen Fellah [co-tutelle ENIT Tunis]

## Conseillers scientifiques

Andrea Gombani [LADSEB-CNR, Padoue, Italie]

Jonathan Partington [Université de Leeds, GB]

Edward Saff [Université Vanderbilt, Nashville, USA]

## Chercheurs invités

Slim Chaabane [Université de Sfax (Tunisie), 1 mois en juin]

Bernard Malgrange [Université Joseph Fourier, 1 mois en septembre-octobre]

Felipe Monroy [Universidad Autonoma Mexicana (Mexique), année sabbatique, à partir d'octobre]

Vladimir Peller [Michigan State University, 1 mois en juin]

## Stagiaires

Fehmi Ben Hassen [Étudiant en thèse, ENIT Tunis, 3 mois en janvier, juillet, novembre]

Alex Bombrun [Stage de fin d'étude ENSTA, de mars à juillet]

Moez Kallel [Étudiant en thèse, ENIT Tunis, 1 mois en juin]

Vincent Lunot [Stage de DEA, univ. de Limoges, d'avril à juin]

Moncef Mahjoub [Étudiant en thèse, ENIT Tunis, 2 mois en novembre-décembre]

# 2. Présentation et objectifs généraux

Le projet développe des méthodes effectives en modélisation, identification et contrôle de systèmes dynamiques, ainsi que pour la résolution de jeux multi-agents.

## 2.1.1. Axes de recherche

- Approximation méromorphe et rationnelle dans le domaine complexe, application à l'identification des fonctions et des matrices de transfert et aux problèmes diffusifs inverses en dimension deux. Approximation de champs harmoniques en dimension supérieure.
- Développement de logiciels dédiés à l'identification et la synthèse fréquentielles de filtres.
- Étude et commande des systèmes non-linéaires : stabilisation continue, transformations de systèmes non-linéaires (linéarisation, classification), application à la mécanique spatiale.

- Jeux dynamiques multi-agents et schémas numériques pour la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

### 2.1.2. Relations internationales et industrielles

- Collaboration avec Alcatel-Space, Alcatel-R&I, le CNES, l'IRCOM, France-Télécom.
- Échanges avec le CWI (Amsterdam, Pays-Bas), le CNR (Padoue, Italie), les universités Vanderbilt à Nashville, du Minnesota à Minneapolis, d'Illinois à Urbana-Champaign, de Californie à San Diego, d'Alabama à Mobile ainsi que la Colorado School of Mines (Etats-Unis), les universités de Beer Sheva (Israël), de Leeds (GB), de Maastricht et d'Amsterdam (Pays-Bas), de Kingston (Canada), de Szeged (Hongrie), la TU-Wien (Autriche), la VUB (Belgique), la TFH-Berlin (Allemagne), l'ENIT (Tunisie), et le CINVESTAV (Mexique).
- Le projet participe au groupe de travail ERCIM « Control and Systems Theory », aux réseaux européens TMR-ERNSI et TMR-NCN, à des coopérations bilatérales (Alliance avec la Grande Bretagne, CMCU avec la Tunisie), ainsi qu'à une convention NSF-INRIA.

## 3. Fondements scientifiques

### 3.1. Identification et déconvolution

Nous débuterons par quelques remarques générales. Abstraire, sous forme d'équations mathématiques, le comportement d'un phénomène que l'on veut étudier est l'étape dite de *modélisation*. La modélisation a typiquement deux objets : le premier est de décrire le phénomène dans sa complexité minimale compte tenu du but poursuivi, et le second est de se doter d'un outil pour en *prédire* les effets. Ceci est couramment pratiqué dans la plupart des sciences appliquées à des fins de conception, de contrôle ou de prédiction, quoique rarement perçu autrement que comme un problème d'optimisation subordonné à chaque cas particulier.

En règle générale, l'utilisateur impose à son modèle une forme paramétrée qui reflète tout à la fois ses habitudes de pensée, sa connaissance physique du phénomène, l'effort algorithmique qu'il est prêt à consentir et le caractère utilisable du modèle *in fine*. La recherche de ce compromis amène usuellement à poser le problème d'approcher les observations expérimentales par celles qu'on tirerait du modèle sous l'effet d'excitations censées représenter les causes du phénomène. La capacité à résoudre ce problème d'approximation, souvent non-trivial et parfois mal posé, conditionne pour une large part la pratique d'une méthode donnée.

C'est lorsqu'on veut évaluer la puissance prédictive d'un modèle que l'on est amené à *postuler* l'existence d'une *vraie* correspondance fonctionnelle entre les données et les observations, et que l'on entre dans le domaine de l'*identification*. La puissance prédictive du modèle peut s'y exprimer de diverses manières qui toutes, cependant, cherchent à mesurer la différence entre le « vrai » modèle et les observations. La nécessité de prendre en compte les différences patentes entre le comportement observé et le comportement calculé induit alors naturellement la notion de *bruit* comme agent dégradant du processus d'identification. Ce bruit, qui s'incorpore au modèle, peut être traité sur un mode déterministe où la qualité d'un algorithme d'identification est son insensibilité à des petites erreurs. Cette notion est celle de problème bien posé en analyse numérique, ou de stabilité du mouvement en mécanique. Le bruit, cependant, est souvent considéré comme aléatoire, et l'on compte alors sur le moyennage pour estimer le « vrai » modèle. Cette notion permet au premier chef de donner des descriptions approchées, mais simples, de systèmes complexes dont les causes sont mal connues mais plausiblement antagonistes. Notons, dans tous les cas, que des *hypothèses* sur le bruit sont nécessaires pour justifier l'approche adoptée (il doit être petit dans le cas déterministe et satisfaire des hypothèses d'indépendance ou d'ergodicité dans le cas stochastique). Ces hypothèses sont rarement validées autrement qu'à l'usage.

Avec le déplacement du problème depuis le compte-rendu d'une série d'expériences jusqu'à l'estimation d'un hypothétique modèle exact, la problématique de l'identification s'enrichit aussi de la possibilité de choisir

les données de façon commode pour explorer la structure du phénomène. Ceci interagit souvent de manière complexe avec le caractère *local* du modèle par rapport aux données (par exemple, un modèle linéaire n'est souvent valable qu'au voisinage d'un point de fonctionnement).

Venons-en à l'activité en identification du projet proprement dit. Alors que le sujet est dominé depuis vingt ans, au plan académique, par le paradigme de la statistique paramétrique, c'est cependant dans une approche déterministe de l'identification des systèmes dynamiques linéaires (c'est-à-dire des processus de convolution), fondée sur l'approximation dans le domaine complexe, que le projet situe sa contribution la plus originale au domaine. Naturellement, les liens profonds que tisse le théorème spectral entre les représentations temporelles et fréquentielles induisent des parallèles bien connus entre la théorie des fonctions et celle des probabilités, et le travail de MIAOU connaît par ce biais quelques retombées dans la théorie stochastique classique. Toutefois, c'est en traduisant le problème de l'identification en un problème inverse, à savoir la reconstruction d'une fonction analytique dans un domaine plan à partir de données à la frontière que l'on aborde ici la question. Dans le cas de processus de convolution de dimension un -*i.e.* d'équations différentielles ordinaires possiblement en dimension infinie- cette traduction s'obtient de manière naturelle par le biais de la transformée de Fourier. Pour certaines équations aux dérivées partielles elliptiques en dimension deux, c'est la forme de la solution fondamentale qui introduit l'holomorphie ; ceci est notamment le cas du Laplacien qui fait apparaître les solutions comme des potentiels logarithmiques. Notons que l'équation de Beltrami, naturellement associée aux applications quasi-conformes, constitue une extension naturelle de ce contexte pour laquelle peu de choses existent aujourd'hui.

On considérera les données sans postuler un modèle exact mais en recherchant une approximation convenable dans un domaine de fonctionnement. Un exemple prototypique sur lequel nous illustrerons notre approche est l'identification harmonique des systèmes dynamiques, couramment rencontrée en ingénierie, où les données sont les réponses du système à des excitations périodiques dans sa bande passante. On cherche un modèle linéaire et stable qui décrive correctement le fonctionnement dans cette bande passante, bien que ce modèle puisse être inadapté aux hautes fréquences, qu'on ne peut d'ailleurs guère mesurer. On souhaite aussi, fréquemment, que ce modèle soit rationnel et de degré convenable, soit parce que ce degré est déterminé par la signification physique des paramètres, soit parce qu'il doit rester raisonnablement faible afin de pouvoir utiliser efficacement le modèle pour le contrôle, l'estimation, ou la simulation. D'autres contraintes structurelles, dictées par la physique du phénomène, viennent fréquemment se greffer sur le modèle. Notons qu'aucune statistique n'est utilisée ici sur les erreurs, qui peuvent provenir tant des défauts de mesure que du caractère erroné de l'hypothèse de linéarité.

Nous distinguerons une étape d'identification<sup>1</sup> qui fournit un modèle de dimension infinie - numériquement de dimension grande - et une étape d'approximation destinée à réduire l'ordre et contraindre le modèle à exhiber certaines propriétés spécifiques de la situation considérée. La première étape consiste typiquement, en termes mathématiques, à reconstruire une fonction analytique dans le demi-plan droit connaissant ses valeurs ponctuelles sur une portion de l'axe imaginaire, en d'autres termes à rendre effectif le principe du prolongement analytique sur le bord du domaine d'analyticité. C'est une question classique et mal posée (impliquant l'inversion du problème de Cauchy pour l'équation de Laplace) que nous plongeons dans une famille de problèmes extrémaux bien posés. La deuxième étape est typiquement une approximation rationnelle ou méromorphe (mais d'autres familles approximantes peuvent intervenir) dans un espace de fonctions analytiques sur un ouvert simplement connexe, par exemple pour fixer les idées le demi-plan droit. Que l'on veuille tirer le meilleur profit de l'ordre maximal imparti ou que l'on cherche à identifier les paramètres physiques du système considéré, il est généralement important, lors de cette deuxième étape, de calculer des approximations optimaux ou sous-optimaux en un certain sens. L'approximation rationnelle dans le domaine complexe est un sujet classique et ardu, pour lequel peu de méthodes effectives existent. En relation avec l'automatique, deux éléments de difficulté supplémentaires s'y greffent, à savoir la nécessité de contrôler les pôles des approximations (qui reflètent la stabilité du système) et celle de traiter les fonctions à valeurs matricielles dans le cas où le système a plusieurs entrées et sorties.

<sup>1</sup>Elle serait qualifiée de non-paramétrique dans certaines terminologies.

L'approximation au sens  $L^p$  de la fonction de transfert sur l'axe imaginaire (*i.e.* le bord du demi-plan droit), classique après la théorie des espaces de Hardy et des opérateurs singuliers, prend dans ce contexte une signification particulière pour  $p = 2$  et  $p = \infty$ . Si  $p = 2$ , elle correspond à une identification paramétrique au minimum de variance lorsque l'entrée est un bruit blanc (dans le cas d'un bruit coloré il faut pondérer le critère par la densité spectrale du bruit), et aussi à la minimisation de l'erreur en norme d'opérateur  $L^2 \rightarrow L^\infty$  dans le domaine temporel. Si  $p = \infty$ , l'approximation correspond à la minimisation de l'erreur au sens de la transmission d'énergie  $L^2 \rightarrow L^2$  (à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel par le caractère isométrique de la transformée de Fourier). Ces problèmes relèvent d'une généralisation à la fois rationnelle et matricielle de la théorie de Szegö qui, bien qu'ayant apparemment peu attiré l'attention jusqu'ici, semble le cadre le plus naturel dans lequel poser la plupart des problèmes d'optimisation liés à l'identification linéaire.

Nous détaillons plus précisément les deux étapes précédentes dans les sous-paragraphes qui suivent. Pour des raisons de commodité, nous abordons souvent les questions précédentes, non sur l'axe imaginaire mais, ce qui est équivalent, sur le cercle unité, où elles correspondent à des considérations analogues pour les systèmes à temps discret.

### 3.1.1. Approximation méromorphe à partir de conditions au bord incomplètes

**Participants :** Laurent Baratchart, José Grimm, Birgit Jacob [Université de Leeds (GB)], Juliette Leblond, Jean-Paul Marmorat [CMA, École des Mines], Jonathan Partington, Fabien Seyfert.

**Mots clés :** *approximation méromorphe, identification fréquentielle, problèmes extrémaux.*

Ce libellé se rapporte à l'élaboration d'un modèle de convolution de dimension infinie à partir de données fréquentielles dans une bande passante  $\Omega$  et d'un gabarit de référence à l'extérieur de  $\Omega$ . La classe de modèles considérée est constituée de modèles stables ou présentant des instabilités de dimension finie (opérateurs de convolution par des fonctions dont la transformée de Laplace est une fonction de transfert méromorphe ayant dans le demi-plan droit un nombre fini de pôles). Cette problématique surgit lorsque l'on envisage des problèmes de conception ou d'identification de systèmes dynamiques linéaires, ou bien encore des problèmes inverses pour le Laplacien en dimension 2.

Les questions étudiées pouvant survenir sur le bord de domaines plans de nature variée, on convient de normaliser ce bord une fois pour toute et de procéder dans chaque cas particulier à une transformation conforme pour se ramener à la situation normalisée. Le contour normalisé choisi est ici le cercle unité. On note  $D$  le disque unité,  $H^p$  l'espace de Hardy d'exposant  $p$ ,  $R_N$  l'ensemble des fonctions rationnelles possédant au plus  $N$  pôles dans  $D$ , et  $C(X)$  les fonctions continues sur  $X$ . On cherche une fonction de  $H^p + R_N$ , prenant sur un arc  $K$  du cercle unité des valeurs proches des données expérimentales et satisfaisant sur  $T \setminus K$  à des exigences de gabarit, de sorte qu'une question prototypique est la suivante :

( $P$ ) Soient  $p \geq 1$ ,  $N \geq 0$ ,  $K$  un arc du cercle unité  $T$ ,  $f \in L^p(K)$ ,  $\psi \in L^p(T \setminus K)$  et  $M > 0$  ; on cherche une fonction  $g \in H^p + R_N$  telle que  $\|g - \psi\|_{L^p(T \setminus K)} \leq M$  et telle que  $g - f$  soit de norme minimale dans  $L^p(K)$  sous cette contrainte.

Pour imposer des contraintes ponctuelles en fréquence (par exemple si les modèles considérés sont des fonctions de transfert de systèmes conservatifs *cf.* section 4.3.2), on peut souhaiter exprimer la contrainte de gabarit sur  $T \setminus K$  de manière plus nuancée, dépendant de la fréquence :

( $P'$ ) Soient  $p \geq 1$ ,  $N \geq 0$ ,  $K$  un arc du cercle unité  $T$ ,  $f \in L^p(K)$ ,  $\psi \in L^p(T \setminus K)$  et  $M \in L^p(T \setminus K)$  ; on cherche une fonction  $g \in H^p + R_N$  telle que  $|g - \psi| \leq M$  p.p. sur  $T \setminus K$  et telle que  $g - f$  soit de norme minimale dans  $L^p(K)$  sous cette contrainte.

Le problème  $P$  est une extension au cas méromorphe, et en données partielles, de problèmes extrémaux classiques relatifs à l'approximation analytique (obtenus en posant  $K = T$  et  $N = 0$ ) que l'on désigne génériquement sous le nom de *problèmes extrémaux bornés*. Ceux-ci ont été introduits et étudiés intensivement ces dernières années dans le projet, en distinguant le cas  $p = \infty$  [5] des cas  $1 \leq p < \infty$ , parmi lesquels le cas  $p = 2$  présente un lien inattendu avec les formules de reconstruction de Carleman [3].

Très lié au problème ( $P$ ), et significatif pour décider de la validité de l'approximation linéaire dans la bande passante considérée, est le problème de complétion suivant :

( $P''$ ) Soient  $p \geq 1$ ,  $N \geq 0$ ,  $K$  un arc du cercle unité  $T$ ,  $f \in L^p(K)$ ,  $\psi \in L^p(T \setminus K)$  et  $M > 0$  ; on cherche une fonction  $h \in L^p(T \setminus K)$  telle que  $\|h - \psi\|_{L^p(T \setminus K)} \leq M$  cependant que la distance à  $H^p + R_N$  de la fonction concaténée  $f \vee h$  soit minimale dans  $L^p(T)$  sous cette contrainte.

Une version de ce problème où la contrainte dépend de la fréquence est :

( $P'''$ ) Soient  $p \geq 1$ ,  $N \geq 0$ ,  $K$  un arc du cercle unité  $T$ ,  $f \in L^p(K)$ ,  $\psi \in L^p(T \setminus K)$  et  $M \in L^p(T \setminus K)$  ; on cherche une fonction  $h \in L^p(T \setminus K)$  telle que  $|h - \psi| \leq M$  p.p. sur  $T \setminus K$ , cependant que la distance à  $H^p + R_N$  de la fonction concaténée  $f \vee h$  soit minimale dans  $L^p(T)$  sous cette contrainte.

Mentionnons que le problème ( $P''$ ) se ramène au problème ( $P$ ) qui revient lui-même, implicitement, à un problème extrémal sans contrainte (i.e. un problème de type ( $P$ ) où  $K = T$ ), que l'on désignera conventionnellement par ( $P_0$ ). Lorsque  $p = \infty$  les problèmes ( $P'$ ) et ( $P'''$ ) peuvent se reformuler comme des cas particuliers de ( $P$ ) et ( $P''$ ) respectivement, mais si  $p < \infty$  il en va différemment. On peut aussi choisir un exposant  $p$  différent sur  $K$  et  $T \setminus K$  (on parle alors de problème mixte), et ceci intervient naturellement pour l'identification de systèmes conservatifs où la contrainte  $|h| \leq 1$  doit avoir lieu ponctuellement, cependant que les données, qui présentent un rapport signal sur bruit faible en bord de bande, sont plus raisonnablement approchées au sens  $L^2$ . Les problèmes mixtes commencent seulement à être étudiés au sein du projet, cf. section 6.6. Il faut également souligner le fait, peut-être contre-intuitif, que ces problèmes n'admettent généralement pas de solution si on néglige la contrainte, c'est-à-dire si l'on pose formellement  $M = +\infty$ . Par exemple, si l'on considère le problème ( $P''$ ), une fonction donnée par sa trace sur un sous-ensemble  $K$  de mesure positive du cercle unité peut toujours être complétée de manière à être arbitrairement proche, sur  $K$ , d'une fonction analytique dans le disque ; cependant, celle-ci tend vers l'infini en module sur  $T \setminus K$  lorsque l'erreur d'approximation décroît vers zéro, sauf dans le cas idéal où la fonction initiale était *exactement* la trace sur  $K$  d'une fonction analytique. Ce phénomène illustre le caractère mal posé du prolongement analytique sur le bord du domaine d'analyticité.

La résolution de ( $P_0$ ) est classique si  $p = \infty$  : c'est la théorie d'Adamjan-Arov-Krein (en abrégé AAK). Si  $p = 2$  et  $N = 0$ , alors ( $P_0$ ) se réduit à une projection orthogonale. La théorie AAK et certaines de ses extensions jouent un grand rôle pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de ( $P''$ ) quand  $p = \infty$ , sous l'hypothèse que la fonction concaténée  $f \vee \psi$  appartient à  $H^\infty + C(T)$  et pour calculer cette solution en résolvant itérativement un problème spectral relatif à une famille d'opérateurs de Hankel dont les symboles dépendent de paramètres implicites en les données, qui sont eux-mêmes ajustés itérativement. La convergence robuste de cet algorithme dans les classes de Hölder-Zygmund séparables a été établie [38]. Dans le cas hilbertien  $p = 2$ , de nouveau pour  $N = 0$ , la solution de ( $P$ ) s'obtient en résolvant une équation spectrale, cette fois pour un opérateur de Toeplitz, dépendant linéairement d'un paramètre  $\lambda$  qui joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange et rend implicite la dépendance en  $M$  de la solution. Le caractère mal posé du prolongement analytique décrit plus haut se manifeste en ceci que, lorsque les données ne sont pas exactement analytiques, l'erreur d'approximation sur  $K$  tend vers 0 si, et seulement si, la contrainte  $M$  sur  $T \setminus K$  tend vers l'infini [3]. On peut quantifier ce phénomène dans des classes de fonctions  $f$  Sobolev-régulières ou méromorphes, et obtenir des estimées asymptotiques exactes des comportements respectifs de  $M$  et de l'erreur, en se fondant sur un procédé constructif de diagonalisation des opérateurs de Toeplitz, d  à Rosenblum et Rovnyak qui rend effectif le théorème spectral[35]. Ces résultats indiquent que l'erreur décroît considérablement plus vite, lorsque  $M$  croît, si les données ont une extension holomorphe sur un voisinage du cercle unité, ce qui est conceptuellement intéressant pour discriminer entre les données proches d'être analytiques et celles qui ne le sont pas ; en vue d'un calcul effectif se pose ici le problème de la représentation des fonctions par des développements spécifiquement adaptés à la géométrie, par exemple selon des bases rationnelles dont les pôles s'accumulent aux extrémités de  $K$ . La recherche dans cette direction n'en est qu'à ses débuts.

Soulignons que ( $P$ ) a de nombreux autres homologues, également intéressants, qui interviennent dans divers problèmes aux limites en liaison avec les fonctions conjuguées. Par exemple, nous avons considéré le problème extrémal suivant, apparenté au problème ( $P$ ) dans le contexte hilbertien analytique  $p = 2$  et  $N = 0$ , mais à la contrainte sur le comportement de l'approximant porte cette fois sur sa partie imaginaire :

Soient  $f \in L^2(K)$ ,  $\psi \in L^2(T \setminus K)$  et  $M > 0$  ; on cherche une fonction  $g \in H^2$  telle que  $\| \text{Im}g - \psi \|_{L^2(T \setminus K)} \leq M$  et telle que  $g - f$  soit de norme minimale dans  $L^2(K)$ .

L'existence et l'unicité de la solution sont établies dans [19] ainsi que les bases d'une procédure de résolution constructive de ce problème. Notons qu'à l'opérateur de Toeplitz qui permet de caractériser la solution de  $(P)$  dans le cas  $p = 2$  et  $N = 0$  s'ajoute ici un opérateur de Hankel. Ce type de contrainte est particulièrement adapté aux problèmes inverses du Laplacien (cf section 4.2), dans lesquels on ne connaît pas toujours la partie réelle de la solution sur toute la frontière (mesures localisées de la température ou du potentiel électrique, par exemple).

Dans le cas non hilbertien où  $p \neq 2, \infty$ , et toujours quand  $N = 0$ , la solution de  $(P)$  se ramène à celle de  $(P_0)$  de manière très analogue au cas  $p = 2$  et, quoique la situation soit un peu plus délicate en ce qui concerne la dualité, on reste dans un cadre convexe (de dimension infinie bien sûr), qui se prête donc peu ou prou aux méthodes locales de l'optimisation.

Si  $p < \infty$  et  $N > 0$ , il n'existe pas aujourd'hui de solution algorithmique au problème  $(P_0)$  dont la convergence ait été démontrée. Cependant, des avancées assez importantes permettent de dessiner un panorama cohérent et de développer des schémas de résolution plutôt efficaces dont on a prouvé la convergence dans des cas particuliers prototypiques au plan de la théorie des fonctions. Nous en résumerons ci-après les aspects essentiels.

En premier lieu, dans le cas où  $p = 2$  et  $N > 0$ , qui est d'importance particulière, la question  $(P_0)$  se ramène à celle de l'approximation rationnelle décrite plus en détail en 3.1.2, pour laquelle les liens avec la théorie classique de l'interpolation, des polynômes orthogonaux, et du potentiel logarithmique sont étroits et féconds. En second lieu, une théorie AAK générale dans  $L^p$  a été proposée qui est relativement complète pour  $p \geq 2$  [16]. Bien que ne possédant pas, pour  $p \neq \infty$ , la puissance calculatoire de la théorie classique, elle possède de meilleures propriétés de continuité et tisse un lien continu entre l'approximation rationnelle dans  $H^2$  (cf. 3.1.2) et l'approximation méromorphe en norme uniforme, ce qui autorise l'usage, dans chacun des contextes, de techniques éprouvées dans l'autre. Ainsi, de façon similaire au cas  $p = \infty$ , il s'avère que la meilleure approximation méromorphe ayant au plus  $n$  pôles dans le disque d'une fonction  $f \in L^p(T)$  s'obtient à partir des vecteurs singuliers de l'opérateur de Hankel de symbole  $f$  entre les espaces  $H^s$  et  $H^2$  avec  $1/s + 1/p = 1/2$ , l'erreur étant là encore égale au  $(n + 1)$ -ième nombre singulier de l'opérateur. Cette généralisation a un caractère topologique marqué et repose sur la théorie des points critiques de Ljusternik-Schnirelman ainsi que sur la géométrie particulière des produits de Blaschke de degré donné. Parmi les aspects communs à cette famille de problèmes, le plus profond, issu de la différentiation, est sans doute le suivant : les équations aux points critiques expriment l'orthogonalité non hermitienne du dénominateur (*i.e.* du polynôme dont les zéros sont les pôles de l'approximant) vis-à-vis des polynômes de degré inférieur, et ce pour une mesure complexe qui dépend, bien entendu, de ce dénominateur puisque le problème est non-linéaire. Ceci permet par exemple d'étendre au cas  $2 \leq p \leq \infty$  le théorème de l'indice [32] et d'aborder le problème d'unicité, d'analyser asymptotiquement les erreurs ou encore, combiné avec des techniques classiques de théorie du potentiel, de caractériser le comportement asymptotique des pôles des approximants pour les fonctions à singularités branchées qui sont d'intérêt particulier dans les problèmes inverses (cf. section 3.1.3). A la lumière de ces résultats, et bien que maintes questions soient toujours ouvertes, on peut espérer des progrès algorithmiques concernant  $(P_0)$  pour  $N > 0$  et  $p \geq 2$  dans les années qui viennent. Subséquemment, le passage de  $(P_0)$  à  $(P)$  devrait pouvoir se faire suivant les lignes du cas analytique [53].

Le cas  $1 \leq p < 2$  reste quant à lui plus largement ouvert encore, notamment du point de vue constructif, car si l'erreur d'approximation peut encore s'interpréter en termes de valeurs singulières, l'opérateur de Hankel prend alors une forme abstraite qui ne permet plus d'identifier isométriquement les vecteurs singuliers comme des fonctions. Ces valeurs de  $p$  ne sont pas un simple cas d'école : la norme  $L^1$  induit la norme d'opérateur  $L^\infty \rightarrow L^\infty$  en fréquentiel qui est intéressante pour atténuer les perturbations. Il est possible qu'une dualité appropriée relie le cas  $p < 2$  au cas  $2 < p$ , mais elle n'a pas été découverte à ce jour.

### 3.1.2. Approximation rationnelle scalaire

**Participants :** Laurent Baratchart, Reinhold Küstner, Juliette Leblond, Martine Olivi, Edward Saff, Herbert Stahl, Franck Wielonsky.

**Mots clés :** *approximation rationnelle, point critique, polynômes orthogonaux.*

L'approximation rationnelle est la deuxième des étapes mentionnées en 3.1, et nous l'aborderons tout d'abord dans le cas scalaire, c'est-à-dire pour des fonctions à valeurs complexes (par opposition à matricielles). Le problème s'énonce alors ainsi :

*Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in H^p$  et  $n$  un entier ; on cherche une fonction rationnelle sans pôles dans le disque unité et de degré au plus  $n$  qui soit le plus proche possible de  $f$  dans  $H^p$ .*

Les valeurs les plus importantes de  $p$  sont, comme nous l'avons indiqué en introduction,  $p = \infty$  et  $p = 2$ , et dans ce dernier cas l'orthogonalité entre les espaces de Hardy du disque et du complémentaire du disque (ce dernier étant normalisé par une annulation à l'infini de sorte qu'il exclut les constantes) fait que l'approximation rationnelle est équivalente à l'approximation méromorphe, *i.e.* on retrouve le problème (P) de la section 3.1.1 avec  $p = 2$  et  $K = T$ . S'il n'existe pas, à l'heure actuelle, d'algorithme démontrablement convergent pour quelque valeur de  $p$  que ce soit, le projet est concepteur d'un algorithme de descente dans le cas  $p = 2$  dont la convergence vers un *minimum local* est garantie et qui est le premier à jouir de cette propriété. Il s'agit en substance d'un algorithme de suivi de gradient, qui procède récursivement par rapport à l'ordre  $n$  de l'approximant et utilise la géométrie particulière du problème pour se ramener à optimiser sur un domaine compact [1]. Cet algorithme permet d'engendrer plusieurs *minima* locaux lorsqu'il y en a, ce qui permet de faire des comparaisons. S'il n'y a pas de *maxima* locaux, cette dernière propriété étant toujours satisfaite pour des degrés d'approximation assez grands, on sait par ailleurs que tout *minimum local* peut être atteint à partir d'un point initial de degré inférieur. Il n'est pas démontré, cependant, que l'on obtienne toujours le *minimum* absolu en adoptant la stratégie du logiciel hyperion ou du logiciel RARL2 (*cf.* sections 5.1 et 5.3) qui consiste à choisir la collection de points initiaux correspondant aux points critiques de degré inférieur, bien que nous ne connaissions pas non plus de contre-exemple, toujours en l'absence de *maximum*.

Il est juste de dire que la mise au point d'un algorithme numériquement efficace dont la convergence vers les meilleurs approximants soit établie est le problème le plus important en pratique. Les algorithmes développés au sein du projet sont semble-t-il assez performants, et paraissent avoir toujours permis de trouver les meilleurs approximants, mais leur convergence globale n'est toujours pas établie ce qui constitue aujourd'hui un objectif de recherche à la fois majeur et latent. *A contrario*, on peut envisager un algorithme d'élimination lorsque la fonction à approximer est rationnelle, pour trouver tous les points critiques puisque le problème est algébrique dans ce cas. Cette méthode est évidemment convergente puisqu'exhaustive, mais il faut calculer les racines d'un système algébrique à  $n$  variables de degré  $N$ , où  $N$  est le degré de la fonction que l'on approxime, et il peut y avoir  $N^n$  solutions parmi lesquelles il est nécessaire de distinguer celles qui sont les coefficients d'un polynôme ayant tous ses zéros dans le disque unité, les seules qui engendrent des points critiques. Ceci semble hors de portée à l'heure actuelle, sachant que les cas typiques d'identification de données réelles abordés dans le projet (*cf.* section 4.3.2) concernent des valeurs de  $n$  de l'ordre de la dizaine et des valeurs de  $N$  de l'ordre de plusieurs centaines.

Afin d'établir ou d'infirmer la convergence des algorithmes qu'il utilise et de les tester sur des situations normalisées, le projet poursuit une étude de longue haleine du nombre et de la nature des points critiques suivant les cas, qui conjugue des outils de topologie différentielle, de théorie des fonctions, et de théorie des opérateurs. Nous nous sommes concentrés tout d'abord sur des exemples classiques se prêtant au calcul. Le cas des transferts dits de relaxation (en d'autres termes des fonctions de Markov), dont l'étude a débuté dans [8], a ainsi été essentiellement élucidé au cours des années[41], ainsi que celui de  $e^z$  (prototype de la fonction entière à coefficients de Taylor convexes) ou celui de fonctions méromorphes (à la Montessus de Ballore) [7]. Un principe général s'est ainsi dégagé qui relie la nature des points critiques en approximation rationnelle à la régularité de la décroissance des erreurs en interpolation, cependant qu'une méthodologie pour analyser l'unicité dans le cas où la fonction à approximer est une intégrale de Cauchy sur un arc ouvert (ces fonctions couvrent *grosso modo* le cas de singularités de dimension 1 qui sont « assez régulières » et apparaissent

notamment en section 3.1.3) a émergé. Cette méthodologie repose sur la localisation des singularités via l'analyse de familles de polynômes orthogonaux non hermitiens, puis sur l'obtention d'estimations fortes de l'erreur permettant d'analyser sa décroissance relative. Notons dans ce contexte un analogue de la conjecture de Gonchar, qui serait que l'unicité a lieu pour une infinité de degrés d'approximation au moins. Un critère d'unicité a aussi été obtenu [16] pour les fonctions rationnelles en s'inspirant de techniques spectrales de la théorie AAK. Ce résultat est intéressant parce qu'il n'est pas asymptotique et ne requiert pas d'estimées ponctuelles de l'erreur ; il requiert en revanche une décroissance drastique des erreurs dans sa formulation actuelle, qui demande à être approfondie.

L'introduction d'une pondération en fréquence constitue un autre développement intéressant, autant pour la nécessité qu'il y a de relativiser les données expérimentales selon que l'on dispose ou non de beaucoup d'information à la fréquence considérée (dans la théorie stochastique, par exemple, l'identification au minimum de variance exige de diviser l'erreur par la densité spectrale du bruit), que pour les améliorations algorithmiques que l'on peut en espérer. À ce sujet, il est intéressant de noter que la démarche la plus répandue pour l'identification fréquentielle, dans la pratique de l'ingénieur, consiste à poser une minimisation aux moindres carrés et à en pondérer les termes pour essayer d'obtenir un résultat convenable par des méthodes générales d'optimisation. On est ainsi conduit à minimiser un critère du type :

$$\left\| f - \frac{p_m}{q_n} \right\|_{L^2(d\mu)} \quad (1)$$

où, par définition, on a posé :

$$\|g\|_{L^2(d\mu)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta),$$

et où  $\mu$  est une mesure positive finie sur  $T$ ,  $p_m$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $m$  et  $q_n$  un polynôme unitaire de degré inférieur ou égal à  $n$ . Un tel problème est en particulier bien posé lorsque  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de dérivée inversible dans  $L^\infty$ . Lorsque  $\mu$  est le carré du module d'une fonction analytique inversible, l'introduction de polynômes  $\mu$ -orthogonaux rend la situation assez similaire au cas non pondéré, du moins si  $m \geq n - 1$ . Plus particulièrement, si  $\mu$  est l'inverse du carré du module d'un polynôme, un algorithme de calcul généralisant [1] a été obtenu dans [10] et implémenté dans le logiciel hyperion (voir section 5.1). L'analyse des équations aux points critiques dans le cas pondéré fournit de nouveaux contre-exemples à l'unimodalité du maximum de vraisemblance en identification stochastique [21].

Mentionnons aussi une autre sorte d'approximation rationnelle, qui intervient naturellement dans de nombreux problèmes de conception où l'on ne dispose que de contraintes de gabarit en module. Elle consiste à approcher le module d'une fonction  $f$  par le module d'une fraction rationnelle, c'est-à-dire à résoudre :

$$\min \left\| |f| - \left| \frac{p_n}{q_n} \right| \right\|_{L^p(T)}.$$

Ce problème a des liens étroits avec l'approximation rationnelle classique, qui commencent à être dégagés. En bref, il semble que l'on puisse ramener ce problème à une suite, infinie mais convergente, de problèmes d'approximation rationnelle standards. Notons par ailleurs que si l'on se cantonne à  $p = \infty$  et si l'on remplace les modules par leur carré dans le problème précédent, de sorte que l'on cherche à caractériser la faisabilité de

$$\left\| |f|^2 - \left| \frac{p_n}{q_n} \right|^2 \right\|_{L^\infty(T)} < \varepsilon,$$

on obtient par la caractérisation de Féjèr-Riesz (qui met en correspondance les polynômes trigonométriques positifs sur le cercle unité avec les carrés des modules de polynômes algébriques), et après avoir chassé le dénominateur, un problème convexe quoiqu'en dimension infinie. Ceci constitue une autre direction fondamentale pour aborder certaines questions d'approximation rationnelle en module qui interviennent naturellement dans divers problèmes de conception de filtres.

### 3.1.3. Comportement asymptotique des pôles d'approximants méromorphes et problèmes inverses pour le Laplacien

**Participants :** Laurent Baratchart, Edward Saff, Herbert Stahl, Reinhold Küstner, Vilmos Totik [univ. Szeged et Acad. des Sciences, Hongrie].

**Mots clés :** *détection de défauts d'analyticité, problèmes inverses à frontière libre, approximation méromorphe, approximation rationnelle, zéros de polynômes orthogonaux, discrétisation d'un potentiel.*

Il s'agit, en substance, d'étudier ici le comportement des pôles des approximants méromorphes, optimaux au sens d'une norme  $L^p$  sur un contour fermé, de fonctions définies par des intégrales de Cauchy de mesures dont le support gît à l'intérieur du contour. Si l'on prend comme contour le cercle unité, ce qui n'est pas vraiment restrictif en théorie grâce aux applications conformes mais soulève bien sûr des questions au plan constructif lorsque le domaine n'est pas de forme standard (par exemple polygonal ou elliptique), on retrouve le cadre des sections 3.1.1 et 3.1.2. Cette formulation est évidemment très générale puisqu'elle inclut, par exemple, l'approximation méromorphe de toutes les fonctions analytiques à l'extérieur du contour et sur un voisinage de celui-ci, et c'est surtout sur le cas de singularités de dimension 1 que la recherche s'est concentrée pour l'instant.

De manière générale, le sujet relève de l'approximation méromorphe et le comportement des pôles est particulièrement important dans l'analyse de la décroissance des erreurs, de l'unicité, et de divers aspects constructifs, de sorte que ce qui suit aurait pu trouver sa place dans la section 3.1.1. Cependant, il est intéressant, et c'est là une motivation première du projet, de l'aborder en relation avec l'approximation de la (trace sur le bord extérieur de la) solution d'un problème aux limites de type Dirichlet-Neumann, pour en tirer des renseignements sur les singularités de ladite solution. Cette méthode pour aborder un problème à frontière libre par ailleurs classique (mais assez largement ouvert) illustre bien l'optique du projet au regard des problèmes inverses, et suscite un axe de recherche actif au carrefour de ses compétences en théorie des fonctions, du potentiel, et des polynômes orthogonaux.

De manière générale, les équations aux points critiques de tels problèmes expriment qu'un polynôme dont les zéros sont les pôles d'un approximant stationnaire par rapport au critère est un polynôme orthogonal non hermitien par rapport à une certaine mesure complexe sur le lieu singulier de la fonction approximée. À la suite des avancées réalisées ces deux dernières années concernant la localisation des zéros desdits polynômes dans le cas non hermitien, l'approche du problème inverse considérée ici apparaît séduisante lorsque les singularités sont 1-dimensionnelles, notamment dans le cas d'un domaine fissuré (voir section 4.2). Dans le cas d'une fissure « suffisamment » analytique, en effet, qui équivaut *grosso modo* à l'approximation d'une fonction avec deux points de branchement, on a pu prouver[40][37] que les pôles des dits approximants s'accumulent au voisinage de l'arc géodésique hyperbolique passant par les extrémités de la fissure, ce qui fournit un algorithme économique pour sa localisation [4]. De plus, la densité asymptotique des pôles n'est autre que la mesure d'équilibre sur l'arc géodésique pour le potentiel de Green, qui charge en particulier les extrémités lesquelles se trouvent *de facto* bien localisées. Il est intéressant de noter que ces résultats s'appliquent également, et de façon plus aisée encore, au cas de la détection de sources monopolaires et bipolaires, dans lequel les défauts d'analyticité proviennent de la présence de pôles et des singularités logarithmiques. Le cas de fissures plus générales (par exemple formées d'une union finie d'arcs analytiques) requiert l'analyse de la situation où il y a un nombre fini mais arbitraire de points de branchement. On conjecture qu'alors les pôles tendent vers le contour  $\mathcal{C}$  joignant les extrémités de ces arcs analytiques qui minimise la capacité du condensateur  $(T, \mathcal{C})$ , où  $T$  est le bord extérieur du domaine  $D$  considéré (voir aussi section 6.5). Cette conjecture, qui est confirmée numériquement, figure au centre des préoccupations du projet dans ce domaine, et vient d'être

démontrée lorsque le lieu de capacité minimale est *connexe* ; ceci recouvre déjà nombre de cas intéressants, y compris le cas de fissures polynômiales générales ou celui de fissures formées de deux arcs « suffisamment analytiques ». Cette avancée, espérons-le, devrait constituer un progrès substantiel vers la preuve du cas général qui, cependant, n'est pas encore acquise. Il serait bien entendu intéressant de savoir ce qui se passe lorsque la fissure est « absolument non-analytique », un cas limite qui peut s'interpréter comme celui d'une infinité de points de branchements et sur lequel on dispose de peu d'information pour l'instant. En ce qui concerne le problème d'une singularité générale, on peut à la lumière de ce qui précède formuler la conjecture suivante : si  $f$  est analytique à l'extérieur et sur un voisinage du bord extérieur d'un domaine  $D$ , et si  $K$  désigne le compact minimal inclus dans  $D$  (qui existe, est unique, et dont on suppose qu'il n'est pas lui-même de capacité nulle pour éviter un cas dégénéré) minimisant la capacité du condensateur  $(T, K)$  sous la contrainte que  $f$  soit analytique à une seule branche en dehors de  $K$ , tout point limite (au sens faible-étoile) de la suite  $\nu_n$  des mesures de probabilité ayant une masse égale en chaque pôle d'un approximant méromorphe optimal (ayant  $n$  pôles au plus) de  $f$  dans  $L^p(T)$  a son support dans  $K$  et pour balayage sur le bord de  $K$  la mesure d'équilibre sur  $K$  du condensateur  $(T, K)$ . On est encore loin de savoir démontrer un tel énoncé aujourd'hui, fût-il correct.

Ce type de résultat ouvre des perspectives nouvelles en contrôle non destructif (voir section 4.2), et relie des questions d'actualité en approximation (comportement des zéros de polynômes orthogonaux non-hermitiens) à certains problèmes inverses classiques mais mal posés pour lesquels il propose une approche duale : approximer les conditions aux limites et non pas l'équation. Notons que le problème de détection d'une fissure suggère des variantes non classiques de l'approximation rationnelle et méromorphe où les résidus des approximants doivent satisfaire certaines contraintes pour tenir compte des conditions aux limites, normales ou tangentielles, le long de la singularité. En effet, les résultats évoqués ci-dessus concernant l'approximation méromorphe (non contrainte) conduisent à identifier une déformation de la fissure (l'arc de capacité minimale qui joint ses extrémités) plutôt que la fissure elle-même, ce qui est précieux pour initialiser une méthode de détermination plus fine et plus lourde (puisqu'ils ont mêmes extrémités) mais n'est pas concluant en soi. Afin de limiter l'effet de déformation, dû au fait que l'on a pas pris en compte dans la structure des approximants les conditions-limites au passage de la fissure (notamment le fait que la discontinuité au passage de la fissure est une quantité réelle), on peut s'intéresser à l'approximation de la solution complexifiée  $F$  d'un problème de Neumann dans un domaine  $D$  fissuré par une fonction méromorphe du type  $\sum_{j=1}^n a_j/(z - z_j) + g(z)$ , où  $g$  est analytique dans  $D$ , sous la contrainte que  $\sum_{k \neq j} a_k/(z_j - z_k) + g(z_j)$  est réel pour chaque  $j$  ; en effet, si les pôles  $z_j$  se répartissent le long d'un arc, la somme précédente est une estimée discrète de la transformée de Hilbert, de sorte que la partie imaginaire de l'expression entière est une évaluation faible au point  $z_j$  de celle de l'approximant, et dire qu'elle est nulle tend à vérifier la condition de Neumann au passage de l'arc. De telles variantes commencent seulement à être envisagées au sein du projet.

Pour finir, observons que le problème d'approcher au sens  $L^p$  sur la frontière d'un domaine, par une fonction rationnelle ou méromorphe, la transformée de Cauchy d'une mesure réelle localisée à l'intérieur de celui-ci peut s'interpréter comme la discrétisation d'un potentiel logarithmique selon un critère intéressant une norme de Sobolev. Cette formulation se généralise à des dimensions supérieures, même si la puissance calculatoire de l'analyse complexe n'y trouve pas de substitut aussi simple, et ceci constitue une perspective à moyen et long terme pour la recherche sur ce sujet. Le cas de sources en dimension trois dans une géométrie sphérique peut, par exemple, s'aborder à l'aide des techniques 2D ci-dessus lorsqu'on les applique sur des coupes planes (voir section 6.7).

### 3.1.4. Approximation rationnelle matricielle

**Participants :** Laurent Baratchart, Andrea Gombani, Martine Olivi, José Grimm.

**Mots clés :** *approximation rationnelle, matrice intérieure, espace à noyau reproduisant, théorie de la réalisation.*

L'approximation matricielle est nécessaire pour traiter de systèmes à plusieurs entrées et sorties et engendre des difficultés additionnelles substantielles, au plan théorique comme au plan algorithmique. Le problème

est un analogue du cas scalaire où le degré de McMillan (le degré d'une réalisation minimale au sens de l'Automatique) généralise le degré :

Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\mathcal{F} \in (H^p)^{m \times l}$  et  $n$  un entier ; on cherche une matrice rationnelle de taille  $m \times l$  sans pôles dans le disque unité et de degré de McMillan au plus  $n$  qui soit la plus proche possible de  $\mathcal{F}$  dans  $(H^p)^{m \times l}$ .

Ici, pour fixer les idées, on définira la norme  $L^p$  d'une matrice comme la racine  $p$ -ième de la somme des puissances  $p$ -ièmes des normes de ses composantes. De fait, le principal sujet d'étude est pour l'instant le cas  $p = 2$ .

Dans le cas, donc, de la norme  $L^2$ , l'algorithme d'approximation scalaire mis au point dans le projet se généralise au cas matriciel [9]. La première difficulté réside dans la représentation des matrices de transfert de degré de McMillan donné  $n$ , et les matrices intérieures (c'est-à-dire les fonctions à valeurs matricielles qui sont analytiques dans le disque unité et unitaires sur le cercle) de degré  $n$  interviennent ici de manière essentielle : elles jouent le rôle du dénominateur dans la représentation fractionnaire des matrices de transfert considérées. L'ensemble des matrices intérieures de degré donné possède une structure de variété qui autorise la mise en œuvre des outils différentiels utilisés dans le cas scalaire. En pratique, il faut exhiber un atlas de cartes (paramétrages valables seulement dans un voisinage donné d'un point) satisfaisant et gérer les changements de cartes lors d'un algorithme de descente. L'algorithme de Schur tangentiel dans le cas matriciel [29] nous a fourni de tels paramétrages et permis l'implémentation de deux algorithmes d'approximation rationnelle. L'un est intégré au logiciel hyperion (voir section 5.1) et travaille avec les matrices de transfert, l'autre est développé sur une plateforme matlab, dénommé RARL2, et manie des réalisations. Tous deux ont été testés sur des données matricielles  $2 \times 2$  provenant d'expérimentations faites au CNES, à l'IRCOM, et chez Alcatel Space dans le cadre de contrats qui font l'objet des sections 7.1 et 7.2, et donnent des résultats d'une grande qualité [2]. Ces codes sont aujourd'hui utilisés par l'IRCOM, couplés au logiciel d'éléments finis EMXD, pour déterminer les couplages physiques effectivement réalisés au cours de la synthèse d'un filtre, ainsi que chez Alcatel Space.

Dans cette application, l'obtention des couplages physiques passe par le calcul de réalisations, ce qu'on appelle en automatique la représentation interne des systèmes. Parmi les paramétrages obtenus à l'aide de l'algorithme de Schur, certains présentent un intérêt particulier de ce point de vue [51]. Ils donnent lieu à un calcul simple et robuste de réalisations équilibrées et sont à la base de l'algorithme RARL2.

Les problèmes relatifs à la multiplicité des minima locaux sont naturellement les mêmes que dans le cas scalaire, et l'analyse de critères garantissant l'unicité est nettement plus complexe topologiquement que dans le cas scalaire. Le cas de fonctions déjà rationnelles du degré cherché nécessite à lui seul des développements relativement lourds [6], et celui de fonctions de Markov matricielles, qui sont les premières auxquelles on songe parce que les relations avec les polynômes orthogonaux matriciels devraient être aidantes, n'est toujours pas élucidé.

En pratique, une stratégie, semblable dans son principe à celle du cas scalaire, a été développée pour engendrer des minima locaux à un ordre donné à partir de ceux trouvés à l'ordre inférieur. Schématiquement, on confectionne une matrice de degré  $n$  par perturbation d'une matrice de degré  $n - 1$  où la chute de degré est due à une simplification pôle-zéro. Il est une différence importante entre les représentations par matrices de transfert, dites externes, et les représentations par réalisation : les premières conduisent à un plongement dans un espace ambiant de matrices rationnelles qui autorise une extension différentiable du critère sur un voisinage de la variété de définition initiale, mais non les secondes (le bord est fortement singulier). Engendrer des conditions initiales de façon récursive est donc plus délicat en termes de réalisations, et cette question n'est pas encore parfaitement élucidée.

Soulignons que les algorithmes mentionnés ci-dessus sont les premiers, et à notre connaissance les seuls disponibles aujourd'hui, à traiter efficacement d'approximation matricielle stable à degré de Mc-Millan contraint.

### 3.1.5. Identification paramétrique linéaire

**Participants :** Laurent Baratchart, Manfred Deistler [TU Wien, Au], Reinhold Küstner, Martine Olivi.

**Mots clés :** *approximation rationnelle, identification paramétrique, topologie des matrices rationnelles, étude des points critiques.*

L'étude asymptotique de certains estimateurs au maximum de vraisemblance est un corollaire naturel des recherches en approximation rationnelle menées dans le projet. Le contexte est ultra-classique : étant donné un processus discret  $y(t)$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^p$ , et un autre processus  $u(t)$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^m$  que l'on tient pour la *cause mesurable* de  $y(t)$ , on cherche à décrire le phénomène par un modèle linéaire d'ordre fini :

$$\hat{y}(t) = Hu(t) + Le(t),$$

où  $e$  est un bruit blanc à  $p$  composantes, décorrélé de  $u$ , censé représenter les aléas qui concourent à créer  $y(t)$ , et où la matrice de transfert  $[L \ H]$  reliant  $(e \ u)^t$  à  $\hat{y}$  est rationnelle et stable de degré de McMillan  $n$ , la matrice  $L$  étant d'inverse stable également (parmi les bruits de même covariance et d'innovation donnée, on choisit celui dont le facteur spectral est de phase minimale). Le nombre  $n$  est, par définition, l'ordre du modèle. Si l'on suppose seulement que  $[H \ L]$  appartient à l'espace de Hardy  $H^2$  et que  $L$  est extérieure (ce qui signifie presque inversible en un sens approprié), une telle représentation est en fait générale pour des processus stationnaires *réguliers* (c'est-à-dire purement non-déterministes en un certain sens). L'identification dans ce contexte apparaît donc comme une approximation rationnelle pour laquelle la théorie statistique classique dresse un compromis entre deux facteurs antagonistes : d'une part l'erreur de biais qui diminue quand  $n$  augmente car la distance entre le « vrai » système et la classe de modèles considérée s'amenuise, d'autre part l'erreur de variance qui augmente avec  $n$  parce que la dispersion de l'estimation s'amplifie avec le nombre de paramètres. Il s'agit là de la version stochastique du compromis complexité-précision omniprésent en modélisation.

Si on introduit à présent comme nouvelle variable la matrice rationnelle  $R$  définie par :

$$R = \begin{pmatrix} L & H \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1}$$

et si  $T$  désigne la première ligne bloc de  $R$ , en normalisant la variance du bruit à l'identité pour simplifier, l'estimation au maximum de vraisemblance est asymptotiquement équivalente, lorsque le nombre d'échantillons croît, à la minimisation de :

$$\|T\|_{\Lambda}^2 = \mathbf{Tr} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(e^{i\theta}) d\Lambda(\theta) T^*(e^{i\theta}) \right\}, \quad (2)$$

où  $\Lambda$  est la mesure spectrale du processus  $(y \ u)^t$  (positive à valeurs matricielles) et où  $\mathbf{Tr}$  signifie la trace. Si l'on restreint davantage la classe de modèles en demandant que les aléas soient blancs, c'est-à-dire  $L = I_m$ , on obtient un problème d'approximation rationnelle pondéré correspondant à la minimisation de la variance de l'erreur de sortie. Si, en outre,  $u$  est lui-même un bruit blanc, la situation devient celle de 3.1.4.

La formulation (2) montre que l'identification stochastique vise à une double généralisation, à la fois rationnelle et matricielle, de la théorie des polynômes orthogonaux de Szegő sur le cercle, et ceci fonde son lien avec la théorie classique des fonctions.

Le problème de la consistance naît de ce que la mesure  $\Lambda$  n'est pas accessible, de sorte que l'on doit estimer (2) à l'aide de moyennes temporelles de l'échantillon observé en supposant les processus ergodiques. La question se pose alors de savoir si l'argument du minimum de la fonctionnelle estimée tend vers celui de (2) lorsque la longueur de l'échantillon augmente, et à quelle vitesse. Le résultat le plus significatif ici est peut-être celui qui, tout en postulant l'existence d'un modèle fonctionnel, ne suppose pas la compacité de la classe de modèles[49], et affirme la consistance sous des hypothèses d'ergodicité faible et d'excitation persistante. Un analogue de la loi des grands nombres indique, dans ce contexte, que la convergence a lieu en  $1/\sqrt{N}$ , où  $N$  est la longueur de l'échantillon.

Dans le résultat précédent, la consistance a lieu au sens de la convergence ponctuelle des estimés sur la variété des matrices de transfert de taille et d'ordre donnés. Une contribution du projet a été de montrer que le résultat subsiste même si l'on ne postule plus l'existence d'une dépendance causale entre les entrées et les sorties, la mesure  $\Lambda$  étant simplement définie comme limite faible des covariances. Une deuxième contribution est que cette convergence a lieu uniformément avec celle de toutes les dérivées sur tout compact de la variété des modèles, ce qui jette un pont entre le comportement algorithmique du problème d'approximation rationnelle (nombre et nature des points critiques, décroissance de l'erreur, comportement des pôles) et celui de la minimisation des moyennes empiriques. Ceci permet de traduire en termes de comportement asymptotique des estimateurs toute propriété uniforme par rapport à l'ordre des approximants, sans avoir à supposer que le « vrai » système appartient à la classe des modèles. Mentionnons par exemple que l'unicité du point critique en approximation  $H^2$ , lorsque la fonction à approximer est presque rationnelle de degré  $n$ , entraîne [6] l'unicité d'un minimiseur local pour l'erreur de sortie lorsque l'entrée est un bruit blanc, ceci presque sûrement asymptotiquement sur tout compact, lorsque la densité de  $y$  par rapport à  $u$  est presque rationnelle de degré  $n$ . Dans le cas de systèmes de relaxation à une entrée-sortie, c'est à dire si la fonction de transfert est une fonction de Markov, on obtient, à la lumière des résultats exposés en section 3.1.2, la même conclusion en prenant si nécessaire un degré d'approximation assez élevé, ce qui constitue le premier cas démontré d'unimodalité où le « vrai système » n'appartient pas à la classe des modèles. Citons aussi l'application à la localisation des pôles des estimés rationnels par minimisation de l'erreur de sortie d'un processus fractionnaire à longue mémoire [36]. Ici réapparaît la question, déjà rencontrée dans l'introduction, de représenter les fonction selon des bases adaptées aux points singuliers sur le cercle que possèdent nécessairement les densités spectrales des processus à longue mémoire. Cette direction de recherche, aujourd'hui embryonnaire, devrait prendre de l'importance

## 3.2. Structure et commande des systèmes non-linéaires

Pour commander un système, on s'appuie en général sur un modèle obtenu à partir de connaissances a priori comme les lois physiques ou à partir d'observations expérimentales. Dans beaucoup d'applications, on se contente d'une approximation linéaire autour d'un point de fonctionnement ou d'une trajectoire. Il est tout de même très important d'étudier les systèmes (ou les modèles) non-linéaires et leur commande pour les raisons suivantes. Tout d'abord, certains systèmes ont, autour de points de fonctionnement intéressants, une approximation linéaire qui n'est pas commandable de sorte que la linéarisation est inopérante, même localement. En second lieu, et même si le linéarisé est commandable, on peut désirer élargir le domaine de fonctionnement au-delà du domaine de validité de l'approximation linéaire. Les travaux décrits à la section 3.2.1 relèvent de cette problématique. Enfin, certains problèmes de commande, comme la planification de trajectoire, ne sont pas de nature locale et ne peuvent être traités à l'aide d'un modèle approché linéaire. L'étude structurelle décrite en 3.2.2 a pour objet de dégager des invariants qui peuvent être utilisés soit pour ramener l'étude à des systèmes plus simples, soit pour servir de fondement à une théorie de l'identification non-linéaire qui fournirait des renseignements sur les classes de modèles à utiliser lorsque l'on ne dispose pas d'information fiable *a priori* et que l'identification linéaire « boîte noire » n'est pas suffisante. Le succès du modèle linéaire, que ce soit en commande ou en identification, tient en grande partie à la compréhension très fine qu'on en a ; de façon analogue, une meilleure maîtrise des invariants des modèles non-linéaires pour certaines transformations est un préalable à une véritable théorie de l'identification et de la commande non-linéaire. Pour tout ce qui relève des systèmes non-linéaires, on sous-entend toujours dans ce qui suit que la dimension de l'état est finie.

### 3.2.1. Stabilisation continue

**Mots clés :** *commande, stabilisation de système non-linéaire, automatique non-linéaire, système mécanique non holonôme.*

**Participants :** Ludovic Faubourg [univ. de Bourgogne et CNES], Andreï Ivanov, Jean-Baptiste Pomet.

La stabilisation par retour continu d'état - ou de sortie c'est-à-dire en information partielle - consiste à concevoir une commande qui soit une fonction régulière (au moins continue) de l'état, et telle qu'un point

de fonctionnement (ou une trajectoire) soit asymptotiquement stable pour le système bouclé. On peut voir cela comme une version affaiblie de la commande optimale : le calcul d'une commande qui optimise exactement un certain critère (par exemple rallier un point en temps minimal) conduit en général à une dépendance très irrégulière en l'état ; la stabilisation est un objectif *qualitatif* (rallier un point asymptotiquement) moins contraignant que la minimisation d'un critère, et qui laisse évidemment beaucoup plus de latitude et permet d'imposer par exemple beaucoup de régularité. Les problèmes de stabilisation sont souvent résolus, du moins au voisinage de points de fonctionnement réguliers, par des méthodes d'automatique linéaire aujourd'hui bien maîtrisées ; les méthodes étudiées ici concernent le comportement au voisinage de points où les méthodes linéaires sont inefficaces (approximation linéaire non commandable), ou visent à maîtriser le comportement sur une région plus étendue de l'espace d'état. Une question très importante est la robustesse de cette stabilité : en effet les lois de commande dépendent énormément de la structure du modèle, et la conservation de la stabilité asymptotique pour des structures ou des valeurs des paramètres voisines n'est pas acquise. Nous détaillons ci-après, deux directions de recherche actives à ce jour dans le projet.

### 3.2.1.1. Stabilisation périodique de systèmes non-linéaires.

Il est connu qu'un certain nombre de systèmes non-linéaires, bien que commandables, ne peuvent pas être stabilisés par une commande qui soit une fonction continue de l'état seulement [43]. On peut bien sûr, pour ces systèmes, relâcher l'exigence de continuité en utilisant par exemple des retours d'état discontinus issus de la commande en temps minimal, mais une idée plus récente consiste à rechercher tout de même des retours d'état continus, ou même lisses, en relâchant plutôt l'exigence que le contrôle ne dépende que de l'état pour permettre également une dépendance par rapport *au temps*, par exemple périodique. Les recherches de l'équipe, menées en collaboration avec le projet ICARE, ont joué un rôle important dans l'obtention de ces résultats [11].

### 3.2.1.2. Fonctions de Lyapunov contrôlées.

Les fonctions de Lyapunov sont un outil bien connu pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques non contrôlés. Pour un système contrôlé, on appelle *Fonction de Lyapunov contrôlée* une fonction qui est de Lyapunov pour le système bouclé par une certaine commande. Ceci se traduit par une inéquation différentielle que l'on appellera « Equation d'Artstein [31] », et qui ressemble à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann mais est largement sous-déterminée. On peut déduire de la connaissance d'une fonction de Lyapunov contrôlée des retours d'état continus stabilisants de manière très commode.

On s'intéresse au sein du projet à l'obtention de fonctions de Lyapunov contrôlées. Cela peut être la première étape de la synthèse d'une commande stabilisante, mais même si une commande stabilisante est déjà connue, l'obtention d'une fonction de Lyapunov contrôlée peut être très utile pour étudier la robustesse de la stabilisation, ou pour modifier la loi de commande initiale en une plus robuste ; également, si on a affaire à un problème où il est important d'optimiser un critère, et que la solution optimale soit difficile à mettre en place, on peut rechercher une fonction de Lyapunov contrôlée « proche » de la fonction valeur du problème de contrôle optimal, qui conduise à une commande stabilisante plus aisée à mettre en oeuvre, et d'un coût (au sens du critère) peu éloigné de l'optimum.

Des travaux récents du projet ont consisté à partir d'objets qui sont « presque » des fonctions de Lyapunov contrôlées, et qui sont explicitement constructibles, ou tout au moins descriptibles, pour les déformer, de manière constructive, en fonctions de Lyapunov contrôlées, ou au contraire, le cas échéant, montrer qu'une telle construction n'est pas possible. Dans [46], ces objets sont soit des fonctions de type intégrales premières [47], que l'on ne peut pas faire décroître strictement, soit des fonctions qui ont les caractéristiques voulues mais ne sont pas lisses [22].

Il est à noter que ces constructions sont exploitées dans l'étude commandée par Alcatel Space (voir section 7.4), où un choix est laissé entre une utilisation de techniques de commande optimale ou de stabilisation.

## 3.2.2. Transformations et équivalences des systèmes et modèles non-linéaires

**Participants :** David Avanesoff, Laurent Baratchart, Monique Chyba [UC Santa Cruz (USA)], Jean-Baptiste Pomet.

**Mots clés :** *automatique non-linéaire, feedback non-linéaire, classification, identification non-linéaire.*

Une transformation par *retour d'état statique* d'un système dynamique contrôlé est un reparamétrage (non singulier) des commandes, dépendant de l'état, et éventuellement un changement de coordonnées sur l'état. Une transformation par *retour d'état dynamique* d'un système dynamique contrôlé consiste à effectuer une extension dynamique (augmentation de l'état et attribution d'une dynamique aux nouveaux états) suivie d'une transformation par retour d'état statique sur le système augmenté.

- Du point de vue des problèmes de commande, l'intérêt de telles transformations est qu'une commande permettant de satisfaire un certain objectif sur le système transformé peut être utilisée pour commander le système original en incluant l'éventuelle extension dynamique dans le contrôleur. Évidemment, un cas favorable est celui où le système transformé possède une structure plus exploitable que l'original, comme par exemple un système linéaire commandable.
- Du point de vue de l'identification et de la modélisation non-linéaire, l'intérêt est, comme signalé plus haut, soit de dégager des invariants qualitatifs permettant de guider le choix d'un modèle non-linéaire d'après des observations, soit de contribuer à une classification des modèles non-linéaires qui manque aujourd'hui cruellement pour élaborer de véritables méthodes d'identification non-linéaire.

Développons deux problèmes abordés dans le projet.

### 3.2.2.1. Linéarisation dynamique.

Le problème de la linéarisation dynamique, non résolu, est celui de trouver des conditions explicites sur un système pour qu'il existe une transformation par retour d'état dynamique le rendant linéaire.

Ces dernières années [48], la propriété suivante a été mise en valeur pour les systèmes commandés : Pour certains systèmes, dont les systèmes linéaires, il existe un certain nombre de fonctions de l'état et de dérivées de la commande qui ne sont liées par aucune équation différentielle, et qui « paramètrent toutes les trajectoires ». Cette propriété, et son importance en automatique, est mise en lumière dans [48], où elle est nommée *platitude différentielle*, les fonctions en question étant des *sorties plates*, ou *fonctions linéarisantes*, et il est montré qu'en gros, un système est *différentiellement plat* si et seulement si il peut être transformé par feedback dynamique en un système linéaire. D'une part, cette propriété de l'ensemble des trajectoires a en elle-même un intérêt au moins aussi important pour la commande que l'équivalence à un système linéaire, et, d'autre part, elle fournit une manière de s'attaquer au problème de la linéarisation dynamique : rechercher des fonctions linéarisantes.

Une question importante demeure cependant ouverte : comment décider de façon algorithmique si un système donné possède ou non de telles fonctions, c'est-à-dire est linéarisable dynamiquement ou non ? Ce problème est à la fois difficile et important pour l'automatique non-linéaire. Pour les systèmes à quatre états et deux commandes dont la dynamique est affine en ces commandes (ce sont les premières dimensions pour lesquelles le problème est véritablement non-trivial), les conditions nécessaires et suffisantes [12] pour l'existence de fonctions linéarisantes dépendant de l'état et de la commande (mais pas des dérivées de la commande) sont certes explicites mais pointent la complexité de la question.

En termes algébriques-différentiels, le module des différentielles d'un système commandable est libre et de dimension finie sur l'anneau des polynômes différentiels en  $d/dt$  à coefficients dans l'espace des fonctions du système, dont on peut construire une base très explicitement [30]. La question est de déterminer s'il admet une base de formes fermées, et donc localement exactes. Énoncée ainsi, il s'agit d'une extension du classique théorème d'intégrabilité de Frobenius au cas où les coefficients sont des opérateurs différentiels. En sus de la stabilité par différentiation extérieure qui régit le cas classique, d'autres conditions sont nécessaires ici pour assurer la finitude du degré des solutions. Le but à moyen terme est de parvenir à un algorithme formel et implémentable, décidant si un système donné est plat en un point régulier. On peut envisager aussi des sous-problèmes ayant leur intérêt propre, comme de décider de la platitude avec un pré-compensateur donné ou encore de caractériser une platitude « formelle » qui correspondrait à une interprétation de l'équation différentielle en un sens affaibli, et également localiser toutes ces questions au voisinage d'un point d'équilibre.

### 3.2.2.2. Équivalence topologique

Dans ce qui précède, on n'a pas évoqué la régularité des transformations considérées. Il est commode de les prendre suffisamment différentiables. Toutefois, ceci conduit à ce qu'un système ne soit pas, même localement (c'est-à-dire pour des valeurs de l'état et de la commande proche d'une valeur fixe), équivalent à la plupart de ses voisins. Évidemment, cela ne permet pas d'envisager la recherche d'invariants « qualitatifs ».

Dans le cas des systèmes dynamiques sans contrôle, il est bien connu (théorème de Hartman-Grobman) que, si l'on ne demande que la continuité des transformations, alors, en dehors de situations certes intéressantes mais que l'on peut considérer comme dégénérées (défaut d'hyperbolicité), tout système est *localement* équivalent à un système linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Il est donc tentant, dans le cadre d'une classification qualitative des systèmes commandés, d'étudier une équivalence modulo des transformations non différentiables, et d'espérer ainsi dégager des invariants beaucoup plus robustes, et peut-être des formes normales stables. Un équivalent du théorème d'Hartman-Grobman pour les systèmes contrôlés dirait par exemple qu'en dehors d'une classe de modèles « rares » (par exemple ceux dont l'approximation linéaire est non commandable), et localement autour de valeurs fixées de l'état et de la commande, aucun phénomène qualitatif ne distingue un système non-linéaire d'un linéaire, tous les phénomènes non-linéaires étant donc soit de nature globale soit des singularités. Un tel résultat est faux : si un système est localement équivalent à un système linéaire commandable via une transformation bi-continue -un homéomorphisme local dans l'espace état-commande-, alors il est *aussi* équivalent à ce même système linéaire commandable via une transformation aussi différentiable que le système lui-même -un difféomorphisme local dans l'espace état-commande- du moins au voisinage d'un point régulier (au sens où le rang de la commande est localement constant), cf. [14] pour un exposé plus complet ; *a contrario*, sous des conditions de régularité très faibles, la linéarisation peut être effectuée par des transformations non causales [34] dont la structure demeure assez mystérieuse, mais qui prennent un sens plus concret lorsque les entrées sont engendrées par une dynamique de dimension finie.

Les considérations précédentes appellent la question suivante, importante pour la modélisation de systèmes commandés : existe-t-il des différences qualitatives locales de comportement entre un système non-linéaire et son approximation linéaire si celle-ci est commandable ?

### 3.2.3. Structure de l'espace des trajectoires

**Participants :** Jean-Baptiste Pomet, Andrey Sarychev [Université d'Aveiro, Portugal].

**Mots clés :** *planification de trajectoires, processus de diffusion.*

Étant donné un système dynamique commandé, une courbe dans l'espace d'état est une *trajectoire* si il existe une commande qui la produit. La *planification de trajectoire* consiste à trouver une trajectoire satisfaisant certaines conditions, par exemple joindre deux points donnés en restant dans une certaine zone. C'est une problématique omniprésente en robotique, par exemple. Il est naturel dans ce contexte de considérer aussi la *planification approchée*, qui consiste à trouver une courbe qui ne soit pas forcément une trajectoire mais qui puisse être approchée par des trajectoires. Cette démarche requiert, cependant, une caractérisation de cet ensemble de courbes. Il est également une autre motivation pour une telle étude : on peut associer à un système contrôlé affine en les commandes un *processus de diffusion*, en remplaçant *grosso modo* les commandes par des bruits blancs indépendants. Ce processus de diffusion définit à chaque instant une mesure de probabilité sur l'espace des courbes paramétrées dans l'espace d'état, et il est connu [54] que le support de cette mesure est exactement l'ensemble des courbes qui peuvent être approchées (au sens  $C^0$ ) par des trajectoires du système contrôlé associé. La caractérisation de cette adhérence a donc des répercussions en analyse stochastique. Pourtant, ce problème a été peu étudié en dehors du cas où l'adhérence en question contient toutes les courbes. Les travaux menés dans le projet ont donné lieu à des résultats significatifs, comme une caractérisation [52] des courbes qui peuvent être approchées au sens  $C^0$  par des trajectoires d'un système en dehors de certaines singularités. Ils se poursuivent en collaboration avec l'université d'Aveiro (Portugal). Une raison supplémentaire de s'intéresser à ce problème est qu'il met en jeu des techniques utilisées par ailleurs pour synthétiser des lois de commandes continues stabilisantes cf. section 3.2.1.

### 3.3. Jeux

**Participante :** Odile Pourtallier.

La théorie des jeux est aujourd'hui un outil bien établi pour modéliser des processus de décision où plusieurs agents interfèrent. Les performances qu'un agent cherche à maximiser dépendent non seulement des actions choisies par cet agent, mais aussi des actions choisies par les autres agents. Les concepts de solutions utilisés le plus fréquemment sont les équilibres de Nash (dans le cas où les agents sont en nombre fini) et les équilibres de Wardrop (dans le cas où on a un continuum d'agents). Ces équilibres sont en général difficiles à calculer et à caractériser. L'activité du projet dans ce domaine se concentre d'une part sur les techniques de calcul ou d'approximation des équilibres, et d'autre part sur l'analyse de cas concrets en utilisant la théorie des jeux.

## 4. Domaines d'application

### 4.1. Introduction

La répartition des activités du projet s'effectuant autour de trois axes qui sont l'identification et la synthèse dans le domaine fréquentiel, d'une part, le contrôle de systèmes différentiels, d'autre part, et enfin les jeux dynamiques, on peut distinguer trois familles dans les applications visées : une qui concerne *grosso modo* les problèmes inverses dans les systèmes diffusifs et résonnants, une qui concerne la commande de certains systèmes mécaniques ou optiques et une qui concerne les stratégies de routage dans les réseaux de télécommunications. Pour ce qui est du premier axe, les techniques d'approximation méromorphe décrites en section 3.1.1 sont susceptibles d'applications à la déconvolution d'équations linéaires où l'analyticité peut provenir, soit de l'application de la transformation de Fourier, soit du caractère harmonique de l'équation elle-même. Pour ce qui est du deuxième axe, les applications qui se développent concernent surtout le contrôle de systèmes qui, pour des raisons diverses, sont « peu » commandables, tels les satellites en petite poussée ou encore les régénérateurs de signaux optiques. Le troisième axe, qui se trouve à un stade plus prospectif, concerne la modélisation du comportement d'utilisateurs d'un réseau sous forme d'équilibres de Nash pour un critère approprié. Nous donnons, ci-après, un aperçu de telles applications.

### 4.2. Problèmes inverses géométriques pour le Laplacien

**Participants :** Laurent Baratchart, Amel Ben Abda [ENIT, Tunis], Fehmi Ben Hassen, Slim Chaabane, Imen Fellah, Mohamed Jaoua [ENIT, Tunis], Moez Kallel, Reinhold Küstner, Juliette Leblond, Moncef Mahjoub, Edward Saff, Franck Wielonsky.

**Mots clés :** *problème inverse, Laplacien, contrôle non destructif, tomographie.*

La localisation de fissures, de sources ponctuelles ou d'occlusions dans un matériau bidimensionnel, à l'aide de mesures thermiques, électriques, ou magnétiques sur sa frontière, est un problème inverse classique. Il se pose pour étudier la fatigue des structures, la tenue des conducteurs, ou encore en magnéto-encéphalographie, en détection d'objets enfouis (mines...) Cependant, aucun algorithme véritablement efficace ne s'est imposé aujourd'hui pour détecter l'emplacement de tels défauts, en particulier si l'on ne dispose pas d'informations initiales sur leur emplacement car l'intégration numérique du problème inverse est très instable. La présence de « pailles » dans un conducteur plan, par exemple, ou encore de sources dans un cortex (modulo une traduction de données initialement 3D en empilement de données 2D, voir plus loin) se traduisent par un défaut d'analyticité de la solution d'un problème de Dirichlet-Neumann associé, et peut en principe être diagnostiquée (voir sections 3.1.3 et 6.7) en utilisant des techniques d'approximation rationnelle ou méromorphe sur le bord de l'objet. Le cas fréquent où les mesures ne sont disponibles que sur une partie de la frontière constitue en outre un exemple typique d'application pour les techniques d'extension analytique ou méromorphe (voir section 3.1.1).

L'approche proposée ici en 2D consiste à bâtir, depuis les données mesurées sur une partie  $K$  de la frontière  $\Gamma$  d'un domaine  $D$  du plan, la trace d'une fonction analytique  $F$  dans  $D$  privé de l'éventuelle singularité  $\gamma \subset D$ . L'usage des techniques d'approximation développées au sein du projet a pour objectif :

- d'étendre  $F$  à tout  $\Gamma$  si les données sont incomplètes ( $K \neq \Gamma$ ), dans l'hypothèse réaliste où la frontière n'est pas entièrement accessible à la mesure, afin d'identifier par exemple un coefficient de Robin inconnu, [44], [45] ;
- de diagnostiquer la présence de  $\gamma$  de façon économique au plan du calcul [17] ;
- de se doter d'informations sur la localisation de  $\gamma$  [37][33].

Ainsi, les problèmes inverses de type géométrique consistant à retrouver une partie inconnue de la frontière depuis des mesures partielles semblent accessibles par ce biais [4], éventuellement combiné à d'autres algorithmes [17]. Les expériences numériques ayant donné d'excellents résultats sur des cas d'école, il importe à présent de considérer des données expérimentales, que le projet cherche présentement à rassembler. En particulier, des contacts avec le projet Odyssée de l'Inria-Sophia devraient nous permettre de disposer de données 3-D de magnéto-encéphalographie dont on a étudié comment en extraire une information 2-D, voir section 6.7. Nous sommes également en train de nouer contact avec des équipementiers électriques pour essayer de nous procurer des données 2-D (ou 3-D cylindriques) issues de l'ingénierie.

Réciproquement, au chapitre des perspectives de recherche ouvertes par ces applications pour améliorer la localisation, figure un problème d'approximation non-classique où les résidus seraient contraints de manière à incorporer dans la structure de l'approximant les caractéristiques héritées du fait que l'on cherche à estimer un potentiel logarithmique avec une condition aux limites cf. section 3.1.3. Des tests ont eu lieu avec des résidus réels pour une fissure droite, et indiquent en effet une configuration critique sur la fissure, mais le paramétrage par pôles et résidus a des singularités globales qui nécessitent l'adoption d'une représentation fondée sur les coefficients des polynômes, qui reste à développer.

Dans un futur un peu plus distant, on envisage la généralisation de ce type de méthodes au cas de problèmes avec coefficients de conductivité variable, ainsi qu'à l'équation de Helmholtz. L'utilisation des propriétés de convergence des algorithmes d'approximation en vue d'établir des résultats de stabilité pour certains de ces problèmes inverses est également attrayante.

### 4.3. Identification et synthèse de systèmes résonnants

**Mots clés :** *télécommunications, multiplexage, filtre, hyperfréquences, ondes de surface.*

Un des meilleurs terrains d'application pour l'activité du projet en théorie des fonctions est l'identification et la synthèse de systèmes physiques pour lesquels l'hypothèse de linéarité est bien vérifiée dans le domaine de fonctionnement et dont les spécifications sont données dans le domaine fréquentiel. Les systèmes résonnants, acoustiques et électromagnétiques, sont des exemples prototypiques et d'actualité en télécommunications. Nous détaillons ci-après deux exemples.

#### 4.3.1. Synthèse de filtre à ondes de surface pour la téléphonie mobile

**Participants :** Laurent Baratchart, Andrea Gombani, José Grimm, Martine Olivi.

Les filtres à ondes de surface sont largement utilisés dans les moyens de communications modernes et en particulier les téléphones mobiles. Ceci est principalement dû à leur petite taille et à leur coût de fabrication peu élevé. Les filtres unidirectionnels, constitués de transducteurs de type SPUDT contenant des réflecteurs internes (cf. fig. 1), induisent des pertes plus faibles et sont de plus en plus utilisés dans cette technologie. La synthèse de tels filtres s'avère beaucoup plus complexe que celle des filtres conventionnels.

Nous nous intéressons ici à un filtre constitué de deux transducteurs de type SPUDT (fig. 2). Chaque transducteur est composé de cellules de même longueur  $\tau$  contenant chacune un réflecteur et, à l'exception de la dernière, une source (fig. 1). Ces sources sont toutes reliées à un circuit électrique extérieur et sont à l'origine des interactions électro-acoustiques. Dans SPUDT2, représenté par la figure 2, les réflecteurs sont positionnés par rapport aux sources de sorte que, au voisinage d'une certaine fréquence dite centrale, aucune onde ne sorte à gauche du transducteur ( $S_g \approx 0$ ), c'est l'unidirectionnalité. Dans le transducteur de droite (SPUDT1), les réflecteurs sont placés à droite des sources de façon à obtenir l'unidirectionnalité vers la gauche.

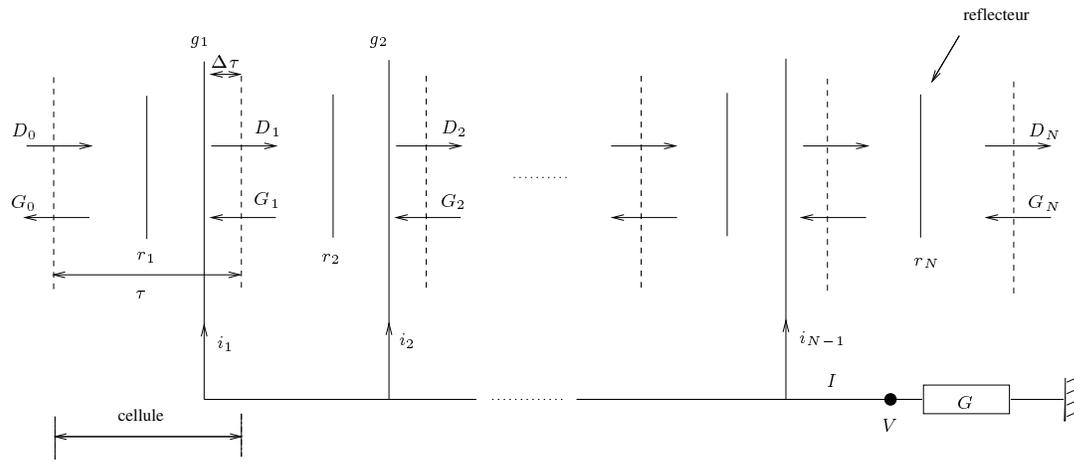


Figure 1. Modèle de transducteur.

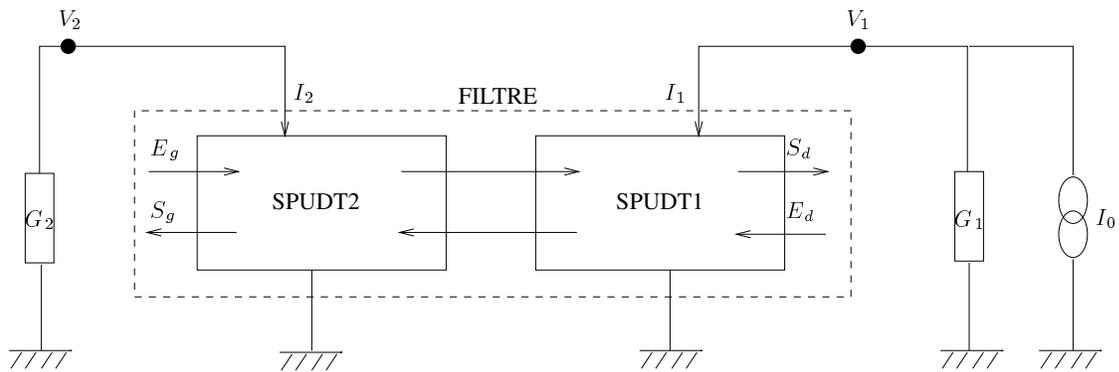


Figure 2. Configuration du filtre.

Des spécifications sont données dans le domaine fréquentiel sur l'amplitude et la phase (ou le temps de propagation de groupe moyen) de la fonction de transfert électrique. Cette fonction traduit le transfert de puissance et s'écrit :

$$E(r, g) = 2 \frac{V_2}{I_0} = \frac{2 \sqrt{G_1 G_2} Y_{12}}{Y_{12} Y_{21} - (Y_{11} + G_1)(Y_{22} + G_2)},$$

où  $Y$  est la matrice d'admittance du couplage :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

Le problème de la synthèse du filtre consiste donc à déterminer les *coefficients de réflexion*  $r$  et les *efficacités*  $g$  des sources des deux transducteurs qui satisfont au mieux les spécifications.

Les transducteurs sont décrits par des matrices de fonctions analytiques dites matrices mixtes qui relient les ondes entrantes et le courant électrique aux ondes sortantes et à la tension sur le transducteur. Les propriétés physiques de réciprocité et conservation de l'énergie confèrent à ces matrices une riche structure mathématique qui autorise une approche par approximation dans le domaine complexe (voir section 7.1) selon les grandes lignes suivantes :

- décrire l'ensemble  $\mathcal{E}$  des fonctions de transfert électrique que l'on peut obtenir en couplant deux transducteurs,
- poser le problème de synthèse comme *un problème d'approximation rationnelle* dans un espace vectoriel normé de fonctions analytiques :

$$\min_{E \in \mathcal{E}} \|D - E\|,$$

où  $D$  est la fonction de transfert électrique désirée.

- utiliser un logiciel d'approximation rationnelle (voir sections 5.1 et 5.3) pour identifier les paramètres de conception.

Le point numéro un, dont la résolution ferait toute la différence entre un algorithme dédié et un algorithme générique, fait l'objet de nos recherches dans ce domaine mais n'a pas été élucidé encore. Il fait intervenir de manière plaisante la géométrie des zéros d'une matrice rationnelle en relation avec l'existence d'une extension symétrique intérieure sans augmentation de degré. Mentionnons que l'intérêt du projet MIAOU pour ces applications a été motivé par une convention d'étude commandée par la société Thomson Microsonics, effectué en 1999.

### 4.3.2. Identification de filtres hyperfréquences

**Participants :** Laurent Baratchart, Stéphane Bila, José Grimm, Jean-Paul Marmorat [CMA-EMP], Fabien Seyfert.

Dans le domaine des télécommunications spatiales (transmission par satellite), les contraintes spécifiques aux matériels embarqués conduisent à réaliser des filtres à cavités résonnantes bimodes dans le domaine hyperfréquences pour le multiplexage (indispensable à la réamplification des signaux). Ces filtres sont constitués d'une succession de corps creux cylindriques reliés (couplés magnétiquement) entre eux par des iris. L'onde électromagnétique qui traverse ces cavités satisfait aux équations de Maxwell, ce qui force par exemple le champ électrique tangent à la cavité à être nul. Une étude un peu plus approfondie (de l'équation de Helmholtz) montre qu'alors seul un ensemble discret de vecteurs d'ondes est ainsi sélectionné. Dans la plage de fréquences d'utilisation du filtre, le champ électrique dans chacune des cavités peut être vu comme se décomposant selon deux modes orthogonaux dans le plan perpendiculaire à l'axe des cavités (les autres modes sont assez éloignés en fréquence pour ne pas intervenir).

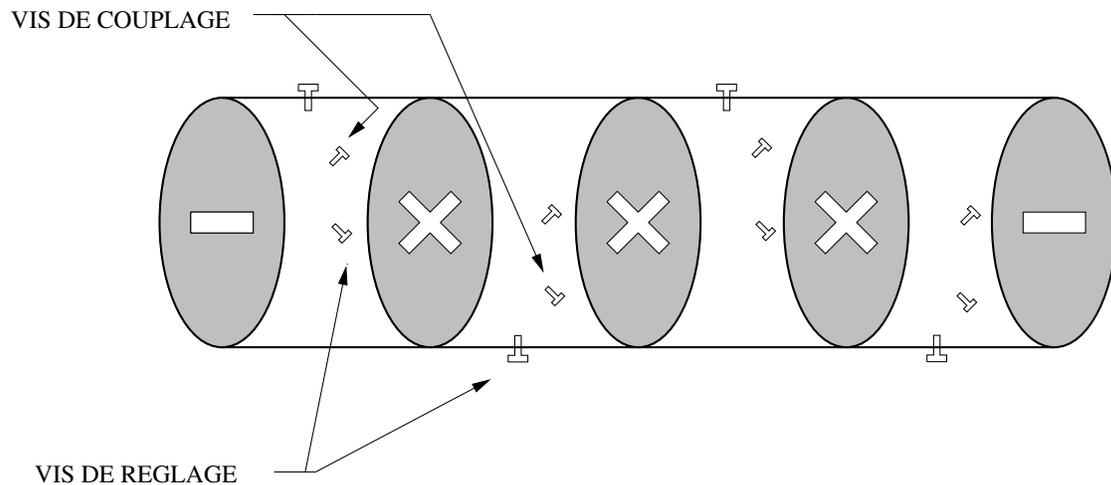


Figure 3. Filtre à cavités bimodes.

Chacune des cavités est munie de trois vis (fig. 3) : les vis horizontales et verticales permettent, en perturbant la géométrie de la cavité, d'ajuster les fréquences de chacun des deux modes. La dernière vis permet, elle, d'ajuster le couplage des deux modes entre eux. Enfin, les iris réalisent un couplage entre modes de cavités adjacentes. Lors de la synthèse du filtre, la géométrie des iris est déterminée et respectée autant que possible à l'usinage. Par contre, après assemblage du filtre, les techniciens ajustent l'enfoncement des différentes vis pour obtenir la réponse désirée. Pour fixer les idées, un problème spécifique posé par le CNES (centre de Toulouse) et dont l'étude s'effectue sous contrat avec celui-ci, concerne le réglage d'un filtre passe-bande à huit cavités aux alentours de 11Ghz.

Autour des fréquences de résonance, une bonne approximation des équations de Maxwell est donnée par la solution d'une équation différentielle du second ordre. On aboutit ainsi à un modèle électrique modélisant notre filtre comme une suite de circuits résonnants couplés entre eux électriquement, et chacune des cavités sera modélisée par deux circuits (un par mode), dont la fréquence de résonance représentera la fréquence du mode et dont la résistance modélisera les pertes par courant de surface.

Le filtre peut être vu comme un quadripôle à deux accès lorsque l'on charge une des extrémités par une résistance et qu'on alimente l'autre. On s'intéresse alors au transfert de puissance ainsi qu'à la puissance réfléchi qui définissent sa matrice de répartition  $S$ , qui peut être considérée comme la matrice de transfert d'un système dynamique, linéaire, causal, et stable à deux entrées et deux sorties. Ses termes diagonaux  $S_{1,1}$ ,  $S_{2,2}$  correspondent à la réflexion, alors que  $S_{1,2}$ ,  $S_{2,1}$  correspondent à la transmission de puissance. Ce sont ces fonctions que l'on sait mesurer expérimentalement sur une bande de fréquences de l'axe imaginaire. Pour un modèle parfait, le filtre est rationnel d'ordre 16, et faire le lien entre les  $S_{i,j}$  mesurés et les composants de l'équivalent électrique du filtre apparaît comme l'étape-clé du réglage car elle permet de savoir dans quel sens on doit modifier l'enfoncement des vis pour améliorer la réponse. Par ailleurs, ceci est également très utile lors de la synthèse pour analyser les simulations effectuées par intégration numérique des équations de Maxwell et valider le choix du dimensionnement, des composants, en particulier par l'absence de modes parasites. C'est un outil d'identification procurant un tel lien que l'on réalise ici.

En réalité, on ne raisonne pas sur l'analogie électrique lui-même mais sur son équivalent passe-bas, obtenu par linéarisation autour de la fréquence centrale, et qui est de degré deux fois moindre, c'est-à-dire 8, mais dont les paramètres sont complexes.

Nous pouvons résumer la stratégie d'identification comme suit :

- mesure physique de la matrice de répartition du filtre autour de la fréquence de fonctionnement de ce dernier. Ces données nous sont fournies par le CNES sous forme, typiquement, de 800 points

mesurés à l'aide d'un vobuloscope sur deux fois la largeur de bande passante, laquelle est de 80Mhz ;

- résolution de problèmes extrémaux bornés en norme  $H^2$  pour les transmissions qui sont nulles à l'infini et en norme de Sobolev pour les réflexions qui sont voisines de 1 à l'infini cf. 3.1.1. Ceci fournit une matrice de répartition de dimension infinie (numériquement de dimension grande) ;
- approximation rationnelle à degré de McMillan fixé (8 en l'occurrence) de cette matrice de répartition en utilisant le logiciel hyperion cf. 3.1.4 et 5.1 ;
- réalisation du transfert ainsi obtenu sous forme d'état, en imposant à la réalisation de vérifier certaines symétries issues de la physique ;
- remontée aux paramètres passe-bas du filtre en cherchant un changement de base qui minimise les couplages non physiques entre cavités. Ceci s'effectue en conjuguant des méthodes de résolution algébriques par intervalles avec des algorithmes de continuation sur le groupe des matrices orthogonales complexes, les changements de base étant de ce type vu les symétries du problème.

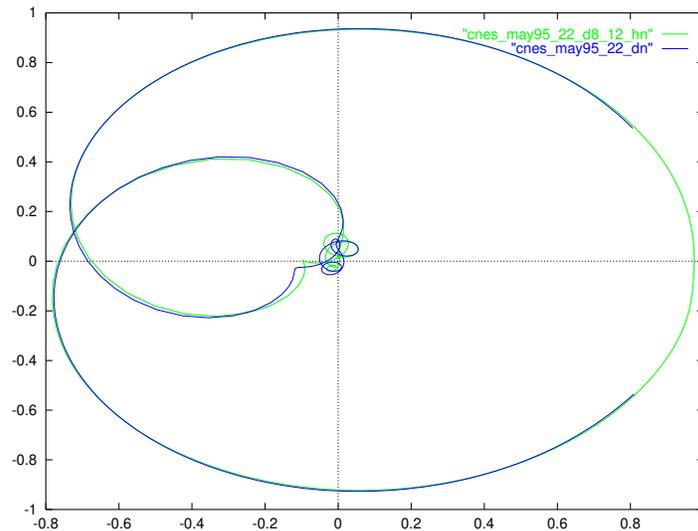


Figure 4. Nyquist - Approximation rationnelle (degré de McMillan 8) et données - S22

L'approximation obtenue *in fine* est remarquable, ce qui peut être interprété comme la validation de la linéarité du système : l'erreur  $L^2$  aux données ponctuelles est d'environ un pour mille. Ceci est illustré ici par un diagramme de Nyquist en réflexion (fig. 4). Les couplages non physiques sont quant à eux inférieurs à  $10^{-2}$ .

Les considérations précédentes sont valables pour de larges classes de filtres. Ces développements ont permis également la synthèse de filtres dissymétriques, utiles notamment pour les répéteurs, selon une géométrie originale.

Le projet étend aujourd'hui ses investigations, toujours dans le cadre d'une étude commandée par le CNES, au problème de la synthèse d'un multiplexeur de sortie (OMUX) qui intègre plusieurs filtres du type précédent en les couplant sur un guide d'ondes. Il s'agit alors d'établir un modèle de comportement global qui prenne en compte :

- chaque canal, et à l'intérieur de celui-ci le couplage entre le filtre et le « té » qui le connecte au guide commun,
- le couplage entre canaux successifs.

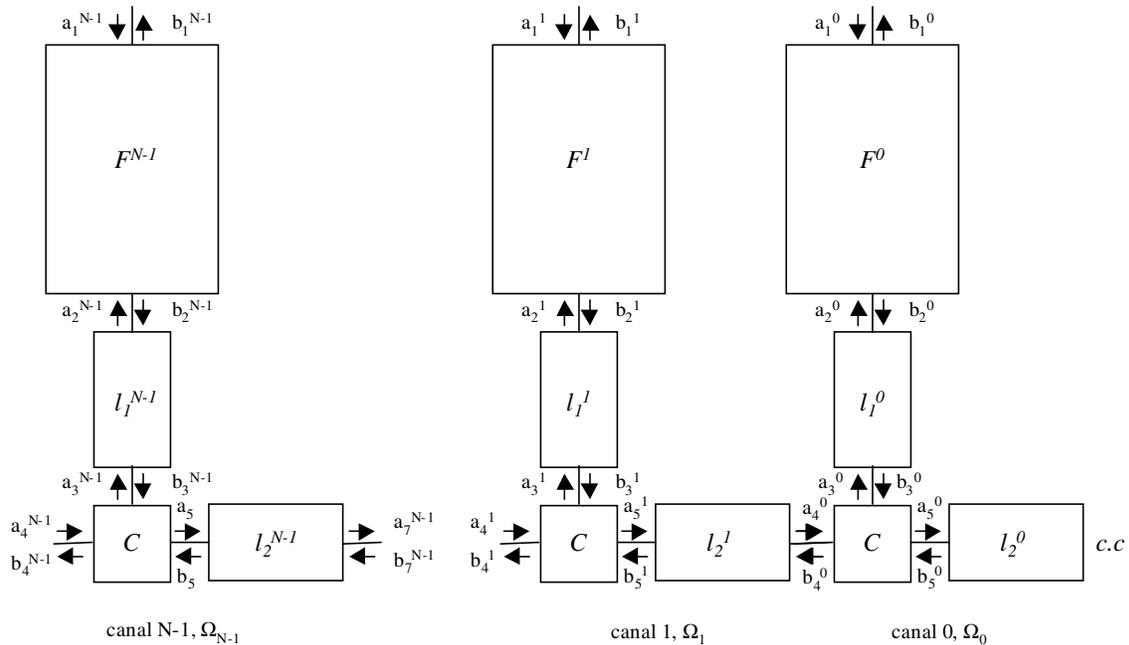


Figure 5.  $N$  filtres sur un multiplexeur.

Ce modèle, qui procède en chaînant les matrices de transfert associées aux matrices de répartition, vient d'être validé. Il mêle éléments rationnels et exponentielles complexes (traduisant les retards), et constitue donc une extension du cadre des transferts rationnels auquel se sont consacrés jusqu'ici les algorithmes d'approximation matricielle développés par le projet. Dans le cadre d'un contrat avec le CNES (voir section 7.1), le projet a entrepris une étude de la conception d'OMUX satisfaisant à certaines contraintes de gabarit, en se fondant sur les outils de théorie des fonctions qu'il a appris à manier et en collaborant avec Alcatel Space pour obtenir des données et valider ses résultats.

#### 4.4. Mécanique spatiale

**Participants :** Ludovic Faubourg [univ. de Bourgogne et CNES], Andreï Ivanov, Jean-Baptiste Pomet.

**Mots clés :** *mécanique spatiale, satellites, contrôle orbital, télécommunications.*

L'utilisation de satellites dans les réseaux de télécommunication motive, et on l'a déjà illustré, pour ce qui est du projet MIAOU, de nombreuses recherches à l'INRIA, que ce soit dans les domaines de la transmission ou de l'imagerie. Les problèmes de mécanique spatiale et de contrôle de ces satellites sont un peu l'intendance de ces technologies nouvelles. Cette intendance est pesante. Très pesante même puisque, par exemple, le carburant représente plus de la moitié de la masse d'un satellite, soit autant de moins disponible pour la charge réellement utile à la mission (télécommunication, surveillance, imagerie etc..) puisque la masse totale est limitée par la capacité des lanceurs.

Il est donc naturel que l'on ait cherché à développer des moyens de propulsion à rendement très élevé. Les progrès de la physique ont permis de rendre opérationnels des modes de propulsion « électriques » (moteurs ionique, à plasma, etc..) qui ont un rendement bien meilleur, mais en contrepartie une puissance instantanée considérablement plus faible, que les moteurs chimiques couramment utilisés. Ceci pose des problèmes de contrôle difficiles, dont l'étude dans le projet s'organise autour d'une collaboration industrielle avec Alcatel-Space à Cannes, voir section 7.4.

Soulignons que la mécanique spatiale est un domaine de recherche très riche qui pose de nombreux autres problèmes de contrôle délicats, tous rendus particulièrement cruciaux par les conditions extrêmes, et la très longue durée de vie exigée d'un satellite.

## 4.5. Optique non-linéaire

**Participants :** Alex Bombrun, Jean-Baptiste Pomet, Fabien Seyfert.

**Mots clés :** *Optique, régénération 3R, fibres optiques, réseaux, télécommunications.*

L'augmentation du débit des signaux numériques dans les réseaux d'information est un enjeu industriel majeur. Le moyen le plus performant à l'heure actuelle pour transporter ces signaux de manière individuelle du serveur vers l'utilisateur et réciproquement est de les faire porter par des ondes lumineuses se propageant dans des fibres optiques. L'utilisation de ce *médium* à la limite de ses temps de réponse pose de nombreux problèmes de contrôle pour maintenir un signal aussi inaltéré que possible, à la fois dans les fibres elles-mêmes et dans les dispositifs de routage et/ou de régénération « tout-optique » qui commencent à faire leur apparition.

Le projet s'intéresse, dans le cadre d'un contrat de recherche avec la société Alcatel R&I (voir section 7.5), au contrôle de régénérateurs tout optique. Voir des précisions sur ce problème en section 6.10.

## 4.6. Transformations et équivalence des systèmes non-linéaires

**Participants :** Laurent Baratchart, Jean-Baptiste Pomet, David Avanesoff.

**Mots clés :** *planification de trajectoires, robotique mobile, identification.*

Les travaux présentés en 3.2.2 se situent assez en amont de la chaîne des applications. Cependant, au-delà du fait que décider si un système donné est linéaire modulo un compensateur adéquat est clairement utile conceptuellement, soulignons que l'utilisation des « sorties plates » pour la planification de trajectoires revêt un grand intérêt, voir par exemple la Conférence Européenne d'Automatique[50]. De plus, comme indiqué en 3.2, une meilleure compréhension des invariants des systèmes non-linéaires conduirait à des progrès considérables en identification.

## 4.7. Jeux dynamiques et télécommunications

**Participants :** Eitan Altman [projet MISTRAL], Rachid Elazouzi [projet MISTRAL], Odile Pourtallier, Tania Jimenez [Université de Merida (Venezuela)].

**Mots clés :** *réseaux de communication, modélisation, contrôle.*

L'ouverture récente de certains réseaux (télécommunication par exemple) à la concurrence entraîne des modifications dans l'utilisation et la conception de ceux-ci. En effet, dans le cas d'un réseau utilisé et conçu par un unique agent dans le but d'optimiser certaines performances, (délai moyen ou probabilité de perte par exemple), les problèmes d'utilisation optimale (par le choix du routage) et de la conception optimale (par le choix des liens du réseaux et de leurs capacités) sont des problèmes d'optimisation.

Dans un contexte économique concurrentiel, les réseaux sont utilisés par un nombre fini d'agents qui cherchent à les utiliser au mieux de leurs intérêts individuels. Il est clair que dans ce contexte, les performances escomptées par un utilisateur dépendent non seulement de ses choix propres, mais aussi des choix de tous les autres utilisateurs du réseau. Nous sommes typiquement dans un contexte de jeu à somme non nulle. L'équilibre de Nash est alors un candidat naturel pour modéliser le comportement raisonnable des utilisateurs. Lorsque les décisions de routage dans un réseau se font de façon décentralisée on voit apparaître des phénomènes contre intuitifs du type « paradoxe de Braess ». En effet, contrairement au cas où le routage serait centralisé par un unique agent, l'amélioration d'un réseau (augmentation du nombre de liens de la bande passante de certains liens etc...) peut conduire à la détérioration des performances de tous les usagers. Une question importante du point de vue des applications est donc la recherche de méthodes pour améliorer le réseau sans risquer de faire apparaître de tels phénomènes.

D'autre part l'utilisation du formalisme de la théorie des jeux dans les réseaux conduit à l'écriture de systèmes dont il est la plupart du temps difficile ou impossible de calculer les équilibres. On cherche donc des techniques pour calculer ou approximer ces équilibres dans des cas particulier (à défaut de pouvoir le faire dans le cas général).

## 5. Logiciels

### 5.1. Le logiciel hyperion

**Participants :** José Grimm [correspondant], Fabien Seyfert, Franck Wielonsky.

Il n'y a pas eu de développement du logiciel hyperion cette année, mais il a été utilisé dans le cadre de contrats avec le CNES et Alcatel Space, ainsi que pour des tests numériques de détection de fissures.

### 5.2. Le logiciel Tralics

**Participant :** José Grimm [correspondant].

On a commencé le développement d'un traducteur de  $\text{\LaTeX}$  vers XML. Pour plus de détail, voir section 6.2. TRALICS a été déposé à l'APP en décembre 2002. Il est disponible en version binaire sous linux, Solaris, Windows 2000 et MacOS X.

### 5.3. Le logiciel RARL2

**Participants :** Jean-Paul Marmorat, Martine Olivi [correspondant].

RARL2 (Réalisation interne et Approximation Rationnelle L2) est un logiciel d'approximation rationnelle (voir section 3.1.4). Ce logiciel prend en entrée une fonction de transfert stable d'un système en temps discret, représenté

- soit par une réalisation interne
- soit par ses  $N$  premiers coefficients de Fourier
- soit par des valeurs ponctuelles sur le cercle

Il en calcule un meilleur approximant (minimum local) *stable de degré de McMillan donné*, au sens de la norme  $L^2$ , dans les deux premiers cas, au sens des moindres carrés pour le troisième.

Il est donc apparenté à la fonction ARL2 d'hyperion (*cf.* section 5.1) et en diffère par son mode de représentation des systèmes : à la représentation polynomiale des transferts d'hyperion, RARL2 substitue la représentation par réalisation interne, ce qui est très intéressant pour certains types de données. Il est implémenté en MATLAB.

Ce logiciel traite les systèmes *multivariables* et utilise un paramétrage qui présente de nombreux avantages :

- il ne décrit que les *systèmes stables* ce qui assure la stabilité de l'approximant,
- il autorise l'utilisation d'outil différentiels et permet d'identifier un système de façon unique,
- il est bien conditionné et conduit à des calculs peu coûteux.

Une stratégie de recherche itérative sur le degré des minima locaux, similaire dans le principe à celle d'ARL2, augmente les possibilités d'obtenir le minimum absolu (voir section 6.3) en engendrant de manière structurée plusieurs conditions initiales. Par rapport au cas polynômial, cependant, on se trouve dans une géométrie singulière du bord de la variété sur laquelle on effectue la minimisation, qui empêche de prolonger le critère à l'espace ambiant. On doit alors faire face à une singularité sur le bord du domaine d'optimisation qui ne permet plus d'y calculer une direction de descente comme étant le gradient d'une fonction définie sur un domaine plus grand, alors que précisément les conditions initiales confectionnées à partir des ordres inférieurs se trouvent sur le bord en question. De ce fait, la détermination d'une direction de descente est à l'heure actuelle, pour une part, heuristique. Cette heuristique fonctionne dans les cas rencontrés jusqu'ici, mais des recherches sont en cours pour rendre cette étape algorithmique.

## 5.4. Le logiciel RGC (Réalisation interne à géométrie contrainte)

**Participants :** Fabien Seyfert, Jean-Paul Marmorat.

La stratégie d'identification de filtres modélisables par un schéma électrique développée au sein du projet (cf. section 4.3.2) se conclut par une étape visant au calcul des paramètres électriques du filtre considéré. Ceci signifie trouver une réalisation  $(A, B, C, D)$  particulière du modèle fourni par l'étape d'approximation rationnelle. Les contraintes que doit satisfaire ce quadruplet sont induites par la géométrie du schéma électrique équivalent et se traduisent typiquement par la nullité de certains coefficients des matrices  $(A, B, C, D)$ . Parmi les différentes géométries de couplages rencontrées celle dite en « flèche » [42] présente un intérêt particulier puisqu'elle est unique pour un transfert donné et qu'un algorithme simple permet d'en faire le calcul. C'est cette réalisation que, dans une première étape, calcule le logiciel RGC. Si toutefois la réalisation souhaitée n'est pas en flèche, on peut montrer que celle-ci se déduit de la réalisation en « flèche » par un changement de base orthogonal (complexe en général). Dans ce cas, RGC lance une procédure d'optimisation locale visant à rapprocher la forme flèche de la forme cible par applications successives de changements de base orthogonaux. Ce problème d'optimisation sur le groupe des matrices orthogonales est non convexe et admet de nombreux minima, locaux mais aussi globaux. En effet, il n'y a pas toujours unicité de la réalisation réalisant le filtre dans la géométrie recherchée. En outre, il est souvent intéressant de connaître toutes les solutions au problème dans la mesure où le concepteur ne peut être certain, dans nombre de cas, de celle qu'il a réalisée, et que parfois même les hypothèses sur l'influence réciproque des modes résonnants ne sont pas suffisamment satisfaites. A l'heure actuelle, hormis le cas particulier de filtres où la géométrie en flèche est la géométrie cherchée (ceci arrive couramment jusqu'au degré 6), le logiciel RGC n'offre aucune garantie quant à l'obtention d'une, et encore moins de toutes, les réalisations satisfaisants aux contraintes prescrites. Des travaux sont en cours pour systématiser cette recherche, cf. section 6.12.

## 5.5. PRESTO-HF : Une boîte à outil dédiée à l'identification de paramètres passe-bas pour les filtres hyperfréquences

**Participant :** Fabien Seyfert.

En vue de permettre le transfert en milieu industriel de nos méthodes, une boîte à outils (fondée sur Matlab) dédiée au problème de l'identification de paramètres passe-bas de filtres hyperfréquences a été développée. Elle permet de mener pas à pas ou d'enchaîner les étapes algorithmiques suivantes :

- détermination des composantes de retard dues aux dispositifs d'accès sur les données d'entrée,
- détermination automatique d'une complétion analytique contrôlée en module pour chacune des voies,
- approximation rationnelle stable à degré de McMillan fixé,
- détermination d'une réalisation contrainte.

Pour ce qui est de l'approximation rationnelle, PRESTO-HF s'appuie sur hyperion (seulement sous Linux ou Unix) ou sur RARL2 (qui ne dépend pas de la plate-forme mais de l'accès à Matlab). En ce qui concerne le calcul de réalisations, PRESTO-HF fait pour l'instant appel à RGC.

La compensation des composantes de retard est basée sur l'hypothèse forte suivante : au bord de la bande de mesure le comportement de  $S_{11}$  et  $S_{22}$  est bien modélisé par un polynôme en  $1/s$  de faible degré. Partant de cette idée une série de problèmes d'optimisation convexes quadratiques sont résolus afin de déterminer une compensation adéquate. Afin de vérifier l'hypothèse précédente les mesures sur le filtre devront être menées sur une bande assez large, typiquement de largeur trois fois supérieure à celle de la bande passante.

La détermination automatique des complétions analytiques utilise les travaux (6.11).

Cette boîte à outils va être prochainement installée chez Alcatel Space à Toulouse.

## 6. Résultats nouveaux

### 6.1. Participation à la création du rapport d'activité

**Participants :** José Grimm, Marie-Pierre Duroillet [DISC].

**Mots clés :** *Perl, XML, module.*

La grande nouveauté du rapport d'activité 2002 consiste en l'utilisation de XML comme format intermédiaire, et la possibilité de saisie directe en XML. Un groupe de travail, formé de M.P. Duroillet, J. Grimm, L. Pierron, et I. Vatton (sans oublier A. Benveniste, J.-P. Verjus et J.-C. Le Moal) a été chargé de la définition et de la mise en place des nouveaux outils pour le RAWeb.

Une première étape a consisté à mettre sur le Web, à titre expérimental, une version Pdf du rapport d'activité 2001 à côté de la version PostScript. Cette version Pdf a été obtenue via une version intermédiaire XML. Pour 2002, on fera de même pour la version PostScript et HTML. La traduction de  $\LaTeX$  vers XML a été réalisée par un script Perl appelé raweb.pl, qui est décrit dans [27]. Ce script utilisait des outils divers et variés comme  $\Omega$ , ltx2x, bibtex, Perl, etc. Pour rendre cet outil plus efficace et plus puissant, on a décidé de le re-écrire en C++, et de l'appeler TRALICS, voir le module 6.2.

Un des grands choix stratégiques est celui de la DTD (*document type definition*). D'une part, elle doit respecter la pseudo-DTD du rapport d'activité (le rapport d'activité reste un ensemble de modules, avec participants, mots-clés, etc), d'autre part, il faut coller le plus possible à une DTD standard, pour réutiliser au maximum les outils de conversion. Nous avons décidé d'utiliser une variante de la TEI (*text encoding initiative*, voir <http://www.tei-c.org/>) pour le texte, MathML pour les mathématiques, un format maison pour la bibliographie (en attendant mieux).

La traduction de XML vers HTML se fait via une feuille de style par les outils Gnome (xsltproc en l'occurrence). Mais cela ne résout pas le problème des mathématiques : on a décidé de traduire les formules de maths en images (dans le cas de  $x + a \cdot \alpha$ , seul le  $\alpha$  est traduit en une image), de la façon suivante : on copie dans un fichier toutes les formules (ou morceaux de formule), on convertit ce fichier en PostScript, et on convertit chaque page en image (via pstotimg, qui est le code Perl utilisé par latex2html dans le même but).

La traduction du texte XML en Pdf ou en PostScript, de même que la traduction des morceaux de formules de math se fait en deux étapes. D'abord on appelle xsltproc pour créer du xsl-fo, ce qui donne un document XML avec instruction de formattage, puis on appelle  $\LaTeX$  ou pdf $\TeX$  sur ce fichier. On utilise ici l'existence du package xmltex qui permet à  $\TeX$  de comprendre le XML, et de deux extensions qui traitent plus particulièrement MathML et xsl-fo. Passer par xsl-fo nous oblige à certaines contorsions, mais il y a peu d'alternatives viables, sauf à changer la DTD ; rappelons quand même qu'il y a une centaine de textes à traiter, de l'ordre de 200 000 lignes de XML, et 13 millions d'octets en tout.

### 6.2. Traducteur Latex-XML

**Participant :** José Grimm.

**Mots clés :** *Analyse lexicale, analyse sémantique, validation.*

La logiciel TRALICS est un logiciel écrit en C++, qui traduit du  $\LaTeX$  en XML, suite à l'expérience acquise avec le script Perl raweb.pl. Il y a trois parties importantes. D'abord, TRALICS est destiné à produire le rapport d'activité de l'Inria ; le logiciel effectue un certain nombre de tests, et peut générer du PostScript sans passer par XML (pour ceux qui n'ont pas tous les outils cités dans le module 6.1). Par contre, il est possible de traduire n'importe quel document  $\LaTeX$ , de manière paramétrée (le logiciel a été testé sur des rapports de recherche Inria, avec une DTD similaire à celle du rapport d'activité, en utilisant des feuilles de style similaires).

La philosophie de TRALICS consiste à être le plus proche possible de  $\TeX$  au niveau de la syntaxe, tout en gardant la sémantique de  $\LaTeX$ . L'analyse syntaxique et lexicale de TRALICS est la même que  $\TeX$ . Autrement dit, des constructions de base du type `\chardef`, `\catcode`, `\ifx`, `\expandafter`, `\csname`, etc., qui ne sont pas décrites dans le manuel de référence de  $\LaTeX$ , car jugées trop compliquées et réservées aux professionnels,

et qui ne sont pas reconnues (ou mal reconnues) par des traducteurs comme latex2html, tth, hévéa, etc., le sont par TRALICS. Toutes les commandes utilisateur sont évidemment reconnues.

Au niveau de la sémantique, on s'est essentiellement attaché à traduire les commandes de base (`\chapter`, `\it`, etc), certains environnements (figure, table, notes), les mathématiques, et les commandes utilisées par le rapport d'activité. La difficulté majeure réside dans le fait que la sémantique n'est pas toujours très claire (dans le cas des tables, il y a une commande de base et beaucoup d'extensions) et qu'il y a des contraintes du langage cible (on aimerait traduire la table en HTML, ce qui implique une perte d'information quelque part dans le processus). Par ailleurs, les mathématiques étant un point fort de  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , certaines constructions ne peuvent pas se traduire en MathML. Finalement, un gros effort a été investi dans le traitement de la bibliographie, dans la mesure où très peu de documents respectent l'esprit et la lettre de BibTeX.

Pour plus d'information sur tralics, consulter la [page web de tralics](#).

### 6.3. Paramètres de Schur et réalisations équilibrées

**Participants :** Andrea Gombani, Bernard Hanzon [Univ. Libre (VU) d'Amsterdam], Jean-Paul Marmorat, Martine Olivi, Ralf Peeters [Univ. de Maastricht].

La question du paramétrage des matrices de transfert intérieures de degré de McMillan fixé est étudiée depuis longtemps dans le projet, cf. section 3.1.4. On s'est essentiellement intéressé aux paramétrages construits à partir d'un algorithme de Schur matriciel. Il en existe une infinité qui possèdent des comportements différents, en particulier lorsqu'on s'intéresse aux systèmes limites, à la représentation interne des systèmes, ou encore à un sous-ensemble. Dans nos logiciels d'approximation rationnelle, on utilise deux paramétrages différents :

1. celui décrit dans [9] et implémenté dans le logiciel Hyperion. Une représentation polynomiale des systèmes y est utilisée.
2. celui décrit dans [51] et implémenté dans le logiciel RARL2. Les systèmes y sont représentés par une réalisation interne.

Ce dernier a été construit de façon à ce que le calcul des réalisations internes soit particulièrement simple. En effet, il n'utilise que des produits de matrices unitaires.

Nous avons prouvé cette année, que comme dans le cas de 1., ce paramétrage autorise une recherche itérative sur le degré de l'approximant [25]. Le principe consiste à construire, à partir d'un minimum de degré  $k$ , un système de degré  $k + 1$  qui donne la même erreur pour le critère  $L^2$ . Ce système est alors utilisé comme point initial pour une optimisation à l'ordre  $k + 1$ . Ainsi la qualité de l'approximant s'améliore lorsque le degré croît, garantissant que l'on atteint au moins génériquement un minimum local puisqu'on ne peut quitter le domaine relativement compact où s'effectue l'optimisation sans baisser de degré. Cette stratégie a été implémentée dans le logiciel d'approximation rationnelle RARL2, voir section 5.3.

Nous nous sommes aussi attachés à l'étude des propriétés de ces différents paramétrages en vue de

- paramétrer des sous-classes de systèmes particulièrement utilisés en pratique : systèmes réels, systèmes symétriques, systèmes autorégressifs.
- étudier les paramétrages de Schur dans le cas des systèmes continus, c'est-à-dire des fonctions intérieures du demi-plan droit. En particulier : existe-t-il une famille équivalente à 2. qui donnerait lieu à un calcul simple des réalisations internes ? Existe-t-il une famille qui faciliterait l'obtention des coefficients de couplage des filtres hyperfréquences ?
- déduire des paramétrages pour des sur-classes de systèmes : systèmes rationnels, systèmes stables, systèmes positifs réels.

## 6.4. Approximation rationnelle et méromorphe

**Participants :** Laurent Baratchart, Reinhold Küstner, Vasiliy Prokhorov [Univ. Alabama, Mobile], Edward Saff, Herbert Stahl.

L'approximation méromorphe de fonctions de Markov dans  $L^1$ , dont l'étude avait été avancée l'année passée en ce qui concerne le taux d'erreur et la distribution des pôles, a fait l'objet de recherches supplémentaires dans sa connexion avec les produits de Blaschke minimaux dans  $L^2(\mu)$  où  $\mu$  est la mesure positive, supportée sur le segment  $(-1, 1)$ , qui définit la fonction. Ceci a donné lieu en particulier à une généralisation du théorème de Smirnov (sur l'appartenance à  $H^p$  d'un quotient de fonctions extérieures de trace  $L^p$ ) dans le contexte des domaines plans coupés par des arcs, qui nécessitait quelques considérations apparemment non classiques sur les valeurs frontières (généralement multivaluées) dans ces espaces. La publication [15] expose l'ensemble de ces résultats. Par ailleurs, ces travaux ont naturellement amené à réfléchir sur les relations entre l'approximation méromorphe des fonctions de Markov et la  $n$ -ième épaisseur de la boule unité de  $H^p$  dans  $L^q(\mu)$ , car dans ce dernier cas les fonctions extrémales sont essentiellement les vecteurs singuliers associés au problème d'approximation pour l'exposant conjugué de  $p/2$ . Dans le cas où  $p \geq q$ , on a généralisé les asymptotiques de Fisher et Stessin pour la  $n$ -ième épaisseur, et établi les conditions d'orthogonalité afférentes. Celles-ci sont intéressantes car elles sont semblables à celles qui interviennent pour les fonctions rationnelles de moindre déviation quadratique lesquelles traduisent, mais sur le cercle plutôt que le segment, le minimum de variance en identification linéaire. Une publication est en cours de rédaction.

Par ailleurs, pour les généralisations des fonctions de Markov que constituent les intégrales de Cauchy (de mesure complexes cette fois) sur des contours symétriques (*i.e.* le potentiel de Green a une dérivée normale égale de part et d'autre du contour), on a établi sous des conditions relativement faible que la limite supérieure de la racine  $n$ -ième de l'erreur d'approximation méromorphe à  $n$  poles dans  $L^p$ , pour  $p \geq 2$ , est inférieure ou égale à  $e^{1/2C}$  où  $C$  est la capacité de Green du contour dans le disque unité. Ceci précise, pour ce type de fonction, le théorème de Parfenov qui ne concerne que la limite inférieure de ladite suite, et pour  $p = \infty$  seulement. Dans le cas où le contour est connexe, on a établi qu'il s'agit en fait d'une vraie limite, et on va s'attacher à prouver au futur que c'est ainsi dans le cas non-connexe également. Ces résultats sont très reliés à ceux concernant l'asymptotique des pôles des fonctions à points de branchement décrits en section 6.5.

## 6.5. Comportement asymptotique de pôles

**Participants :** Laurent Baratchart, Reinhold Küstner, Edward Saff, Herbert Stahl, Vilmos Totik [univ. Szeged et Acad. des Sciences, Hongrie].

Il a été établi dans [16] que les dénominateurs des meilleurs approximaux rationnels ou méromorphes  $L^p$  sur une courbe fermée, disons le cercle unité  $T$  pour fixer les idées, sont pour  $p \geq 2$  déterminés par une relation d'orthogonalité qui, lorsque la fonction à approximer se présente comme la somme d'une fonction analytique dans le disque unité  $D$  et d'une intégrale de Cauchy sur une courbe  $\gamma$  (lieu des singularités) contenue dans  $D$ , permet d'interpréter les dénominateurs comme des polynômes orthogonaux non hermitiens pour une certaine mesure complexe. Lorsque  $\gamma$  est contenue dans l'axe réel, il est établi aussi depuis l'an dernier que, sous des conditions très faibles, les pôles des meilleurs approximaux rationnels dans  $L^2(T)$  convergent vers le segment minimal de l'axe réel contenant le support de la mesure, dès lors que celle-ci est quelque peu régulière. Lesdites conditions demandent que l'argument de la mesure soit à variation bornée, mais on peut autoriser un support quelconque dans  $(-1, 1)$ , cependant que la variation totale de la mesure ne doit pas être trop fine, au sens où les points où la densité par rapport à la mesure de Lebesgue élevée à toute puissance inférieure à 1 est nulle forment un ensemble de capacité nulle ; c'est le critère  $\Lambda^*$  de Stahl et Totik pour la régularité des polynômes orthogonaux. On a cette année généralisé encore ces conditions au cas où le poids est variable, avec un argument petit  $o(n)$  si  $n$  est le degré du polynôme, pourvu que son module de continuité soit majoré par une fonction continue en zéro. On travaille actuellement pour savoir si on peut relâcher cette dernière hypothèse. Quoiqu'il en soit, par transformation conforme, ceci s'applique au cas où  $\gamma$  est un arc géodésique, et suffit amplement pour analyser, au sens de la convergence faible-étoile de la mesure de comptage, les pôles des approximaux de fonctions algébriques avec deux points de branchement : la distribution asymptotique

des pôles, si  $\gamma$  ne touche pas  $T$ , est alors la distribution d'équilibre du condensateur  $(T, \mathcal{C})$  où  $\mathcal{C}$  est l'arc géodésique joignant les points de branchement. On sait depuis deux ans, à la suite de cela, que les pôles des meilleurs approximations rationnels ou méromorphes de la « solution complexe » du Laplacien sur un domaine fissuré convergeront, pourvu que la fissure soit « suffisamment analytique », vers l'arc géodésique joignant ses extrémités, avec une densité plus marquée vers ces extrémités (puisque tel est le cas de la mesure d'équilibre). Ceci fournit des renseignements appréciables sur sa localisation. Le cas de fissures nettement plus générales, par exemple polynomiales par morceaux, se ramène sous des conditions de régularité convenables pour les données à analyser, au cas d'une fonction avec un nombre fini, mais peut-être supérieur à deux, de points de branchement.

Ayant conjecturé que, pour un nombre fini mais quelconque de points de branchement, la distribution asymptotique des pôles est la distribution d'équilibre sur le continuum  $\mathcal{M}$  contenant ces points qui minimise la capacité du condensateur  $(T, \mathcal{M})$  -voir section 3.1.3- on a cette année prouvé cette conjecture dans le cas d'un continuum connexe. La preuve n'utilise *pas* l'orthogonalité, mais plutôt le caractère minimisant des approximations optimaux ainsi que certaines propriétés de symétrie de l'arc de capacité minimale vis-à-vis des applications conformes sur l'anneau, combinés à la bornitude de la transformée de Cauchy sur les courbes de Carleson. Ceci est une avancée importante dans le problème, et on s'attache maintenant à se débarrasser de l'hypothèse de connexité qui bien que vérifiée dans nombre de cas intéressants et testable *a posteriori*, est superflue croyons-nous.

## 6.6. Problèmes extrémaux avec contraintes de gabarit ponctuelles

**Participants :** Laurent Baratchart, Juliette Leblond, Fabien Seyfert.

L'étude du problème ( $P'$ ) énoncé en section 3.1.1 a été entamée dans le cas  $p = 2$ ,  $\psi = 0$ , et lorsque la fonction  $M$  est dans  $L^\infty$  de  $T \setminus K$  et bornée inférieurement presque partout par une constante strictement positive. Outre l'existence et l'unicité de la solution, on a prouvé que la contrainte était saturée *point à point* c'est à dire que  $|g| = M$  p.p. sur  $T \setminus K$ , ce qui est peut-être contre-intuitif. On en a tiré des équations au point fixe caractérisant la solution, qui font apparaître derechef le résolvant d'un opérateur de Toeplitz, mais avec un multiplicateur qui, cette fois, est une fonction [39]. L'étude de la convergence d'une itération de ces équations est en cours, avec pour but de parvenir à une implémentation au sein du logiciel hyperion. Notons que, si l'on approche le multiplicateur par une fonction en escalier, on retrouve un enchaînement d'équations spectrales semblables à celles actuellement utilisées pour résoudre le problème ( $P$ ).

Un algorithme consistant à discrétiser la contrainte en module et à utiliser des techniques d'optimisation basées sur la dualité lagrangienne, comme dans 6.11, est à l'étude.

## 6.7. Problèmes inverses pour le Laplacien 2D et 3D

**Participants :** Laurent Baratchart, Amel Ben Abda [ENIT, Tunis], Fehmi Ben Hassen, Slim Chaabane, Imen Fellah, Mohamed Jaoua [ENIT, Tunis], Moez Kallel, Juliette Leblond, Moncef Mahjoub, Jean-Paul Marmorat.

**Mots clés :** *problème inverse, Laplacien, contrôle non destructif, tomographie.*

En utilisant le fait que les fonctions harmoniques en dimension 2 sont les parties réelles de fonctions analytiques, les outils d'approximation analytique, méromorphe et rationnelle développés au sein du projet ont permis d'aborder de nouvelles questions de détection de singularités ou de reconstruction de fonctions et de géométries depuis des données frontière de solutions du Laplacien.

Certains défauts de conductivité électrique sont modélisés par des sources ponctuelles à l'intérieur du domaine considéré. En dimension 2, cette question a connu cette année une progression significative. Dans cette situation, les singularités de la fonction (de la variable complexe) que l'on reconstitue depuis les mesures disponibles sur le bord sont des pôles (dans le cas de sources « dipolaires ») ou des points de branchements (ici en *log*, pour des sources « monopolaires »). De ce fait, le comportement des pôles de ses approximations rationnels ou méromorphes- décrits en 3.1.1 et 3.1.2 - permet d'en localiser efficacement la position. Ceci fait l'objet d'une partie de la thèse de F. Ben Hassen, et en particulier d'un travail de

développement logiciel, et de l'article en préparation [33]. En 3-D, les foyers épileptogènes dans le cortex sont couramment représentés par des sources ponctuelles que l'on cherche à localiser depuis des mesures en surface (sur le scalp) d'une différence de potentiel, laquelle est donc solution d'un Laplacien. Notons que la tête est éventuellement modélisée par une succession de couches sphériques. Ce problème inverse - dit EEG pour électroencéphalographie - fait l'objet d'une collaboration du projet Miaou avec le projet Odyssée de l'INRIA-Sophia. Bien que ceci soit assez récent, il semble maintenant possible de proposer un traitement « par tranches » 2-D de ce problème - sur une succession de disques le long de la sphère. Les aspects constructifs et numériques des procédures envisagées sont encore à l'étude (projection harmonique 3-D, transformation de Riesz, harmoniques sphériques).

En 2-D à nouveau mais en données incomplètes, le problème géométrique consistant à retrouver - constructivement - une partie inconnue du bord d'un domaine supposée isolante est considéré dans le cadre de la thèse d'I. Fellah. Il semble que les techniques d'approximation et d'extension analytique de la section 3.1.1 puissent fournir des algorithmes intéressants, qui nécessitent cependant de disposer numériquement de transformations conformes du disque, ainsi que des résultats de stabilité.

Finalement, la résolution de problèmes de Cauchy analytiques sur une couronne est elle aussi un ingrédient nécessaire de la méthodologie, car elle intervient pour propager les conditions au bord vers le centre du domaine, où on cherche les singularités, lorsque ce domaine est constitué de plusieurs couches homogènes de conductivités différentes. Cette question apparaît aussi lors de l'identification d'une fissure d'interface dans un tube, question sur laquelle M. Mahjoub commence sa thèse. Nous nous sommes pour l'instant bornés à implémenter un algorithme de point fixe classique, mais ce point sensible nécessitera des développements au futur : il apparaît comme un problème de complétion à la frontière pour un domaine doublement connexe, et pose la question d'une approximation méromorphe dans ce cadre (plutôt que sur le disque).

## 6.8. Application de la théorie des jeux dans les réseaux

**Participants :** Eitan Altman [projet MISTRAL], Rachid Elazouzi [projet MISTRAL], Odile Pourtallier.

On s'est intéressé à des réseaux tels que la vue du réseau par chaque utilisateur est identique. En particulier cela implique que tous les utilisateurs ont la même demande de routage. Cette hypothèse de symétrie, ainsi que des hypothèses techniques portant sur les fonctions d'évaluation des agents, nous a permis de montrer que la recherche de l'équilibre de Nash était équivalente à la recherche des zéros d'une fonction, et de plus permettait de réduire la dimension du problème de façon importante. On a montré que les hypothèses techniques sont satisfaites pour des réseaux où tous les agents ont la même source et la même destination.

On a étendu le résultat au cas où le réseau est utilisé par plusieurs groupes d'agents. A l'intérieur de chaque groupe, on suppose que les agents sont tous identique (en terme de demande de routage).

Concernant les phénomènes de paradoxe de Braess, on a montré que certaines techniques de distribution de capacités dans les liens d'un réseau permettent une amélioration des performances globales du réseau. En particulier, l'addition, ou l'amélioration de liens directs entre la source et la destination ainsi que la multiplication de toutes des capacité de tous les liens (par un facteur dépendant du lien) aboutissent à un tel résultat.

## 6.9. Linéarisation locales de systèmes commandés

**Participants :** Laurent Baratchart, Jean-Baptiste Pomet.

Dans le cadre de la rédaction complète [34] des résultats évoqués en section 3.2.2 concernant l'équivalence topologique, on a démontré un théorème de linéarisation locale abstrait pour un système dynamique contrôlé régi par une équation différentielle au voisinage d'un équilibre hyperbolique. En résumé, si les contrôles sont gouvernés par un flot compatible avec celui du système (qui peut être la translation temporelle, l'effet d'un *feedforward*, etc...), on peut sous des conditions de régularité minimales et de bornitude des dérivées très faibles linéariser localement le système par le truchement d'un homéomorphisme dépendant du flot en question. La dépendance de la transformation linéarisante par rapport au flot se présente maintenant comme une question importante pour les applications, manifestement difficile.

## 6.10. Contrôle d'un régénérateur tout-optique de signaux numériques

**Participants :** Alex Bombrun, Jean-Baptiste Pomet, Fabien Seyfert.

La base du dispositif en question est un interféromètre dont le réglage est très fin, et sensible à la puissance du signal entrant, malheureusement variable. Dans le cadre d'un contrat de recherche avec la société Alcatel (cf. section 7.5) (et du stage d'Alex Bombrun), nous avons contribué à une régulation du dispositif qui lui permette de supporter ces variations de puissance. Une régulation pour un dispositif moins complexe donnait déjà satisfaction, et il a fallu ici une commande multivariable. Les résultats expérimentaux ont été suffisamment concluants pour envisager le dépôt d'un brevet.

Le travail a essentiellement consisté en une modélisation simple du procédé, direction dans laquelle il y a encore beaucoup à faire, le but étant de caractériser les bons points de fonctionnement.

## 6.11. Extension analytique à valeurs polynomiales

**Participant :** Fabien Seyfert.

On étudie ici le problème d'extension analytique de mesures fréquentielles ponctuelles d'un système dissipatif linéaire lorsqu'on fait l'hypothèse forte que la partie à réinventer est bien modélisée par un polynôme en  $1/s$  ( $s = iw$ ). Soit  $\{w_i, S(w_i)\}$  la série de mesures fréquentielles,  $J$  l'intervalle défini par  $J = [\min_i(w_i), \max_i(w_i)]$  et qui contient 0. On définit continuellement la fonction  $S(w)$  pour  $w \in J$  par interpolation (par exemple par des splines) entre les points de mesures. Soit  $I$  un ensemble de fréquences de mesure pour lesquelles nous pensons que le modèle polynomial est aussi valable ; typiquement  $I$  est constitué de deux jeux de mesures aux extrémités de  $J$  par exemple

$$I = \{w_k, |w_k| \geq w_c\}.$$

On se pose alors le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_p \psi(p) &= \sum_{w_k \in I} |S(w_k) - p(\frac{1}{w_k})|^2 \\ &\begin{cases} p \in C_n[x] \\ \|P_{\bar{H}^2}(S \vee p)\|^2 \leq E_c \\ \forall w \in J_c \quad |p(1/w)|^2 \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

où  $J_c$  représente le complémentaire de  $J$ , et  $\vee$  et l'opérateur de concaténation ( $S \vee p$  représente la fonction définie par  $S$  sur  $J$  et par  $p(1/w)$  sur  $J_c$ ).  $\bar{H}^2$  indique ici l'orthogonal de l'espace de Hardy du demi-plan droit associé à la mesure  $\frac{dw}{1+w^2}$ . En d'autres termes, on cherche à déterminer la complétion polynomiale qui rende le mieux compte des données pour les fréquences appartenant à  $I$  et ce, sous deux contraintes ; l'une concernant la norme de la partie instable des données complétées et l'autre indiquant le caractère dissipatif que doit satisfaire l'extension. On montre que si le cardinal de  $I$  est supérieur ou égal à  $n + 1$  et sous la condition qu'il existe un point admissible alors (3) a une unique solution  $p_0$ . De plus si il existe un point admissible qui satisfait les inégalités dans (3) de manière stricte alors il existe  $\lambda_0 \cdots \lambda_{2n+1}$  réels positifs ou nuls et  $x_1 \cdots x_{2n+1} \in W = [1/\min_i(w_i), 1/\max_i(w_i)]$  vérifiant,

$$\begin{cases} \lambda_0 (\|P_{\bar{H}^2}(S \vee p)\|^2 - E_c) = 0 \\ \forall k \in \{1 \cdots 2n+1\} \quad \lambda_k (|p(x_k)| - 1) = 0 \end{cases}$$

et tels que  $p_0$  soit l'unique minimum du problème d'optimisation convexe suivant,

$$\min_{p \in C[x]} \sum_{w_k \in I} |S(w_k) - p(\frac{1}{w_k})|^2 + \lambda_0 \|P_{\bar{H}^2}(S \vee p)\|^2 + \sum_{k=1}^{2n+1} \lambda_k |p(x_k)|^2.$$

Deux obstacles existent cependant pour rendre la caractérisation précédente constructive :

- la localisation des  $x_i$
- l'ajustement des multiplicateurs  $\lambda_i$

Afin d'obtenir une estimation des  $x_i$  nous avons choisi de discrétiser la contrainte en module en disons  $m$  points dont on peut montrer qu'une répartition judicieuse est de type Chebyshev. On montre alors que la solution du problème discrétisé converge vers  $p_0$  lorsque la discrétisation s'affine. Notons de plus que des estimations fines des erreurs relatives au respect de la contrainte en module sont disponibles en fonction de  $m$ .

Pour ce qui est de l'ajustement des multiplicateurs de Lagrange nous avons choisi de résoudre le problème dual de maximisation concave associé au discrétisé de (3). Les contraintes de ce problème de maximisation sont des contraintes linéaires de positivité des multiplicateurs. Le calcul du gradient ainsi que du hessien associés à ce problème ont permis l'implémentation efficace d'un algorithme de résolution de (3) au sein du logiciel PRESTO-HF. Notons aussi que des techniques similaires à celles utilisées ici sont actuellement à l'étude afin d'approcher la solution du problème exposé dans 6.6.

## 6.12. Détermination exhaustive des paramètres de couplage correspondant à une matrice de répartition

**Participants :** Laurent Baratchart, José Grimm, Jean-Paul Marmorat [CMA-EMP], Fabien Seyfert.

On s'intéresse ici à la mise en correspondance d'un ensemble  $A$  de réalisations contraintes de filtres avec un ensemble  $B$  de matrices de répartition ; cette mise en correspondance se faisant par l'évaluation du transfert associé à chaque objet de  $A$ . Nous nous sommes intéressés au cas où  $A$  est une variété algébrique et  $B$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^n$ . Les cas les plus intéressants d'un point de vue pratique sont alors ceux où  $A$  et  $B$  sont tels qu'à chaque élément générique de  $B$  ne correspondent qu'un nombre fini d'éléments de  $A$ . On montre comment la question de savoir si  $A$  et  $B$  vérifient cette hypothèse revient au calcul du rang générique de la différentielle d'une application de  $A$  dans  $B$ , qui pratiquement peut être effectué par un calcul de base de Groebner sur un corps fini de grande caractéristique.

Pour ce qui est du calcul de tous les éléments de  $A$  correspondant à un élément donné de  $B$  nous avons dégagé pour certains cas particuliers (du choix de  $A$  et  $B$ ) une formulation du problème faisant intervenir un système algébrique avec un nombre très restreint de variables. Cette manière de faire nous a permis en utilisant les logiciels Gb et Rs du projet Spaces de mener à bien le calcul exhaustif des solutions pour des filtres d'ordre 10.

Ces travaux ont fait l'objet d'une présentation invitée [26]. Nos efforts vont maintenant porter sur le développement d'une méthode et d'un outil les plus génériques possible pour aborder ce genre de problèmes. Nous collaborons sur ce sujet avec les projets Coprin, Galaad et Spaces.

## 6.13. Approximation fréquentielle et conception d'OMUX

**Participants :** Laurent Baratchart, Jean-Paul Marmorat [CMA-EMP], Fabien Seyfert.

Un OMUX (Output MULTipleXor) est modélisé dans le domaine fréquentiel comme un chaînage de matrices de répartition de filtres, semblables à ceux décrits en section 4.3.2, connectées en parallèle sur un accès commun par le biais de guide d'ondes cf. figure 5. Le problème de la conception d'un OMUX satisfaisant des contraintes de gabarit se traduit alors naturellement en un ensemble de contraintes sur les valeurs des matrices de répartition et des déphasages induits par les longueurs dans les bandes de fréquence considérées.

Dans un premier temps, afin de pouvoir tester nos méthodes futures et les comparer aux réglages proposés par Alcatel Space, nous avons mis au point un simulateur d'OMUX sur une plate-forme matlab. L'approche directe, qui est celle utilisé par l'industriel, est bien sûr de connecter à ce simulateur un optimiseur pour tâcher de réduire transmissions et réflexions là dans les bandes de fréquence où il le faut. C'est ce que nous avons fait, toujours avec un optimiseur matlab, en choisissant un critère intégral  $L^p$  avec  $p = 16$  pour se

rapprocher de la norme uniforme sans perdre la différentiabilité. Nous avons en outre calculé le gradient du critère explicitement, ce qui a engendré un gain de temps important (par un facteur 10) propice aux développements ultérieurs. Cependant, les résultats sont comparables à ceux obtenus par Alcatel Space sur un cas jugé non-satisfaisant. Nous considérons donc que ce problème nécessite une approche plus spécifique.

Pour cela, nous avons observé que, à chaque fréquence, les contraintes peuvent s'interpréter comme une succession de conditions intéressant chaque canal tour-à-tour, traduisant l'appartenance de sa réflexion évaluée à ladite fréquence à une boule du plan dont centre et rayon dépendent des autres canaux et des longueurs autres que celle adjacente au canal considéré. La géométrie hyperbolique intervient ici naturellement de par le caractère des formules de chaînage, et c'est elle qui produit ce découplage relatif entre les interventions des différents paramètres (longueurs de canaux et filtres). En particulier, ceci permet de voir que le réglage de chaque filtre et de chaque longueur de guide devrait pouvoir s'effectuer de manière diagonale si on disposait d'une approximation rationnelle efficace avec contrainte ponctuelle de norme (*i.e.* l'approximant doit être « de Schur »). Il s'agit d'une question intéressante, pour l'application et en elle-même, qui devra être étudiée au futur.

Ceci permettrait d'envisager une procédure de réglage en plusieurs étapes, d'abord relaxée (canal à canal sur un mode diagonal) puis globale en utilisant une méthode de quasi Newton. Notons que la discrétisation en fréquence des critères intégraux et la presque périodicité des exponentielles traduisant les retards interagissent ici de manière complexe, et créent une multitude de minima locaux.

## 7. Contrats industriels

### 7.1. Contrat CNES-IRCOM-INRIA

Contrat n°1 01 E 0542

Dans le cadre d'un contrat qui lie le CNES, l'IRCOM et l'INRIA, dont l'objectif est de réaliser un ensemble logiciel pour l'identification et la conception de dispositifs hyperfréquences, le travail de l'INRIA a porté sur les points suivants :

- modélisation et analyse algorithmique du réglage d'un IMUX, cf. section 4.3.2,
- étude de la structure et du calcul des paramètres de couplage associés aux paramètres physique de filtres hyperfréquence à géométrie donnée (cf. section 6.12),
- accélération du logiciel hyperion,
- modélisation et analyse algorithmique du réglage d'un OMUX, cf. section 4.3.2.

Ce contrat s'accompagne de la mise à disposition de la version prochaine du logiciel hyperion aux deux partenaires.

Ce contrat sera renouvelé en 2003.

### 7.2. Contrat Alcatel Space (Toulouse)

Vente d'une licence intéressant les logiciels hyperion, RARL2 et RGC.

### 7.3. Contrat France Telecom R&D-INRIA

Il s'agit d'un contrat de recherche de trois ans, qui a débuté début 2001. C'est un contrat impliquant les deux projets INRIA, MISTRAL et MIAOU. Il s'agit d'utiliser des modèles de théorie des jeux pour analyser les performances de réseaux de télécommunication, dans un contexte concurrentiel.

### 7.4. Contrat Alcatel Space (Cannes)

Contrat n°1 01 E 0726.

Il s'agit d'un contrat de recherche de trois ans, débuté à la fin 2001. Son objet est la détermination de lois de commande permettant la mise à poste d'engins spatiaux (satellites) à l'aide de moteurs de nouvelle génération, d'excellent rendement, mais qui délivrent une très faible poussée.

## 7.5. Contrat Alcatel CIT

Contrat n°1 02 E 0517.

Il s'agit d'un contrat d'un an, qui porte sur le réglage de régénérateurs « tout optique » de signaux à très haut débit. Le dispositif existe en laboratoire.

# 8. Actions régionales, nationales et internationales

## 8.1. Comités Scientifiques

O. Pourtallier est membre du bureau de l'ISDG (International Society for Dynamic Games).

L. Baratchart est membre du bureau éditorial de la revue *Computational Methods in Function Theory*.

J. Leblond fait partie du Comité Colors de l'INRIA-Sophia.

## 8.2. Actions nationales

Convention AQUAE : il s'agit d'une Action Inter-organisme Cemagref-INRA, dans laquelle l'INRIA participe en tant qu'équipe partenaire. Titre : « Durabilité et gestion quantitative de la ressource en eau : commande de systèmes à retard ». La participation (modeste) du projet MIAOU est une collaboration avec le CEMAGREF à Montpellier, sur la modélisation de biefs de rivière, en vue de l'automatisation de la gestion de systèmes barrage-rivière pour l'irrigation.

## 8.3. Actions financées par la commission européenne

Le projet fait partie du réseau TMR *European Resarch Network on System Identification* (ERNSI), voir <http://www.cwi.nl/~schuppen/ernsi/ernsihp.html>.

Le projet fait partie du réseau TMR *Nonlinear Control Network*, voir <http://www.supelec.fr/lss/NCN/>. « Membre permanent » pour le projet : J.-B. Pomet.

Le projet fait partie du « Marie Curie multi-partner training site » *Control Training Site*, voir <http://www.supelec.fr/lss/CTS/>.

Le projet fait partie du groupe de travail en théorie des systèmes du consortium ERCIM, voir <http://www.ladseb.pd.cnr.it/control/ercim/control.html>.

## 8.4. Visites de chercheurs extérieurs

Outre les « conseillers scientifiques » et les « chercheurs invités » mentionnés à la section 1, le projet a accueilli les chercheurs suivants pour des séjours plus brefs :

- Bernard Hanzon (Univ. Libre (VU) d'Amsterdam),
- Ralf Peeters (Univ. de Maastricht),
- Laurent Praly (Ecole des Mines de Paris),
- Christophe Prieur (université de Paris XI),
- Herbert Stahl (TU Berlin).

## 9. Diffusion des résultats

### 9.1. Enseignement universitaire

#### Cours

- D. Avanessoff a donné des cours d'optimisation et de statistique à l'Université de Nice - Sophia Antipolis.
- L. Baratchart a enseigné un module intitulé « Problèmes extrémaux et identification » dans le cadre du cours d'été « Méthodes d'Approximation en Théorie des Systèmes » de l'Université Cantabrique qui s'est tenu à Laredo du 2 au 6 septembre.
- J. Leblond enseigne les mathématiques dans le cycle 12-15 du centre Montessori les Pouces Verts.
- Voir les enseignements d'O. Pourtallier dans le rapport d'activité du projet COMORE.

#### Encadrements de stages

- Alex Bombrun, « Etude de l'asservissement d'un interféromètre Mach-Zehnder », stage de fin d'étude, École Nationale Supérieure des Techniques Avancées (ENSTA).
- Fehmi Ben Hassen, « Localisation de sources ponctuelles par approximation rationnelle et méromorphe », stages dans le cadre de sa thèse, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT).
- Moez Kallel, « Sur la détermination d'une fissure par des techniques d'approximation analytique et méromorphes depuis des données partielles », stage dans le cadre de sa thèse, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT).
- Vincent Lunot, « Utilisation de Méthodes Algébriques pour la détermination exhaustive de paramètres de couplage de filtres hyperfréquences » Stage de DEA, université de Limoges.
- Moncef Mahjoub, « Extension analytique et problème de Cauchy sur une couronne ; application à l'identification de fissures d'interface », stage dans le cadre de sa thèse, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), novembre, décembre, responsable J. Leblond.

#### Encadrements de thèses en cours :

- David Avanessoff, « Linéarisation dynamique des systèmes non linéaires ».
- Imen Fellah, « Complétion de données dans les classes de Hardy et applications aux problèmes inverses », co-tutelle avec l'ENIT (Tunis).
- Andreï Ivanov, « Commande de satellites en faible poussée », arrêtée en novembre.
- Reinhold Küstner, « Comportement asymptotique des pôles d'approximants méromorphes et polynômes orthogonaux non-hermitiens ».

#### Thèses soutenues :

- Franck Wielonsky a soutenu son habilitation sur la base du mémoire « Approximation rationnelle dans l'espace de Hardy du disque, interpolation rationnelle de la fonction exponentielle et approximation de Hermite-Padé » [13] à l'Université Sciences et Technologies de Lille le 21 octobre 2002.

### 9.2. Animation de la communauté scientifique

F. Wielonsky est détaché comme enseignant à l'Université de Lille (USTL).

Un séminaire « Commande et Identification » dont l'assistance regroupe des chercheurs sur ce thème à l'INRIA, au CMA (École des Mines de Paris) et à l'I3S (CNRS) est organisé par le projet. Contact : J.-B. Pomet.

J. Grimm a donné un exposé didactique sur le RAWEB à Rocquencourt.

J. Grimm est membre du CUMI (Comité des utilisateurs des moyens informatiques) de l'unité de recherche de Sophia Antipolis.

J. Leblond a donné un exposé sur son métier dans le premier épisode de « 1h pour un métier », séminaire de « communication interne » de l'INRIA-Sophia.

J. Leblond a participé en tant qu'examinateur au jury de thèse de Moez Kallel, ENIT, Tunis, décembre.

J.-B. Pomet est membre du Comité de Centre de l'unité de recherche de Sophia Antipolis et a participé au séminaire de deux jours sur la communication interne à l'INRIA.

### 9.3. Participation à des colloques, séminaires, invitations

L. Baratchart a été invité (une semaine) à l'Université du Minnesota (Minneapolis) et y a donné un exposé au séminaire de Théorie des Systèmes en février.

L. Baratchart a été invité (deux semaines) à l'Université Vanderbilt (Nashville, Tennessee) et y a exposé au Colloquium en mars.

L. Baratchart a délivré un exposé au Colloque « Spaces of Holomorphic Functions and their Operators », organisé au CIRM (Luminy) du 30 septembre au 4 octobre.

L. Baratchart a été invité à exposer au séminaire d'Analyse de l'Université de Provence en novembre.

L. Baratchart a été invité (deux jours) au LADSEB (CNR, Padoue) et y a donné un exposé dans le cadre du séminaire de Théorie des Systèmes en novembre.

L. Baratchart, J. Leblond et M. Olivi ont participé (exposés, démonstration) au workshop du réseau TMR « ERNSI » (voir section 8.3) au Croisic (France) en septembre.

L. Baratchart et J. Leblond ont été invités à donner des exposés au PICO'02 (Problèmes Inverses, Contrôle et Optimisation de Forme), Carthage, Tunisie, en avril.

J. Leblond a été invitée à donner un exposé au WIOP'02 (Workshop on Inverse and Obstacles Problems), Lisbonne, Portugal, en novembre.

J. Leblond s'est rendue en visite à l'École Polytechnique et à l'UTC en juin, a assisté à la Conférence à la mémoire de Jacques-Louis Lions, en juillet.

M. Olivi a présenté un exposé au CDC 2002, Las Vegas (USA), 9-13 Décembre.

J.-B. Pomet et A. Ivanov ont participé au 2<sup>e</sup> colloque international sur les trajectoires à poussée faible (LOTUS'2) organisé par le CNES à Toulouse du 18 au 20 juin.

J.-B. Pomet a participé à la 4<sup>e</sup> « International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations » à Wilmington (USA), du 24 au 27 mai.

F. Seyfert a donné un exposé invité à « International Workshop On Microwave Filters » organisé par le CNES et l'ESA à Toulouse du 24 au 26 juin 2002.

## 10. Bibliographie

### Bibliographie de référence

- [1] L. BARATCHART, M. CARDELLI, M. OLIVI. *Identification and rational  $L^2$  approximation : a gradient algorithm*. in « Automatica », volume 27, 1991, pages 413-418.
- [2] L. BARATCHART, J. GRIMM, J. LEBLOND, M. OLIVI, F. SEYFERT, F. WIELONSKY. *Identification d'un filtre hyperfréquence par approximation dans le domaine complexe*. Rapport technique, numéro RT-219, Inria, 1998, <http://www.inria.fr/rrrt/rt-0219.html>.
- [3] L. BARATCHART, J. LEBLOND. *Hardy approximation to  $L^p$  functions on subsets of the circle with  $1 \leq p < \infty$* . in « Constructive Approximation », volume 14, 1998, pages 41-56.

- [4] L. BARATCHART, J. LEBLOND, F. MANDRÉA, E. SAFF. *How can meromorphic approximation help to solve some 2D inverse problems for the Laplacian ?*. in « Inverse Problems », volume 15, 1999, pages 79-90.
- [5] L. BARATCHART, J. LEBLOND, J. PARTINGTON. *Hardy approximation to  $L^\infty$  functions on subsets of the circle*. in « Constructive Approximation », volume 12, 1996, pages 423-435.
- [6] L. BARATCHART, M. OLIVI. *Critical points and error rank in best  $H^2$  matrix rational approximation of fixed McMillan degree*. in « Constructive Approximation », volume 14, 1998, pages 273-300.
- [7] L. BARATCHART, E. B. SAFF, F. WIELONSKY. *A criterion for uniqueness of a critical point in  $H^2$  rational approximation*. in « Journal d'Analyse », volume 70, 1996, pages 225-266.
- [8] L. BARATCHART, F. WIELONSKY. *Rational approximation in the real Hardy space  $H_2$  and Stieltjes integrals : a uniqueness theorem*. in « Constructive Approximation », volume 9, 1993, pages 1-21.
- [9] P. FULCHERI, M. OLIVI. *Matrix rational  $H^2$ -approximation : a gradient algorithm based on Schur analysis*. in « SIAM J. on Control & Optim. », volume 36, 1998, pages 2103-2127.
- [10] J. LEBLOND, M. OLIVI. *Weighted  $H^2$  approximation of transfer functions*. in « Math. of Control, Signals & Systems (MCSS) », volume 11, 1998, pages 28-39.
- [11] J.-B. POMET. *Explicit Design of Time-Varying Stabilizing Control Laws for a Class of Controllable Systems without Drift*. in « Syst. & Control Lett. », volume 18, 1992, pages 147-158.
- [12] J.-B. POMET. *On Dynamic Feedback Linearization of Four-dimensional Affine Control Systems with Two Inputs*. in « Control, Optimization, and the Calculus of Variations (COCV) », volume 2, juin, 1997, pages 151-230, <http://www.edpsciences.com/cocv/>.

## Thèses et habilitations à diriger des recherche

- [13] F. WIELONSKY. *Approximation rationnelle dans l'espace de Hardy du disque, interpolation rationnelle de la fonction exponentielle et approximation de Hermite-Padé*. Habilitation à diriger des recherches, Univ. des Sc. & Tech. de Lille, octobre, 2002.

## Articles et chapitres de livre

- [14] L. BARATCHART, M. CHYBA, J.-B. POMET. *Topological versus smooth linearization of control systems*. in « Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications », World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, pages 203-215.
- [15] L. BARATCHART, V. A. PROKHOROV, E. B. SAFF. *Asymptotics for minimal Blaschke products and Best  $L^1$  meromorphic approximants of Markov functions*. in « Computational Methods and Function Theory », numéro 2, volume 1, 2002, pages 501-520.
- [16] L. BARATCHART, F. SEYFERT. *An  $L^p$  analog to AAK theory for  $p \geq 2$* . in « J. Funct. Anal. », numéro 1, volume 191, 2002, pages 52-122.

- [17] A. BEN ABDA, M. KALLEL, J. LEBLOND, J.-P. MARMORAT. *Line-segment cracks recovery from incomplete boundary data*. in « Inverse problems », numéro 4, volume 18, 2002, pages 1057-1077.
- [18] T. BOULOGNE, E. ALTMAN, H. KAMEDA, O. POURTALLIER. *Mixed equilibrium for multiclass routing games*. in « IEEE Trans. Automatic Control », numéro 6, volume 47, 2002, pages 903-916.
- [19] B. JACOB, J. LEBLOND, J. R. PARTINGTON. *A constrained approximation problem arising in parameter identification*. in « Linear Algebra and its Applications », volume 351-352, 2002, pages 487-500.
- [20] H. KAMEDA, O. POURTALLIER. *Paradoxes in distributed decisions on optimal load balancing for networks of homogeneous computers*. in « Journal of the ACM », numéro 3, volume 49, 2002.
- [21] J. LEBLOND, E. SAFF, F. WIELONSKY. *Weighted  $H_2$  rational approximation and consistency properties*. in « Numerische Mathematik », numéro 3, volume 90, 2002, pages 521-554, <http://dx.doi.org/10.1007/s002110100281>.

### Communications à des congrès, colloques, etc.

- [22] L. FAUBOURG, J.-B. POMET. *Nonsmooth functions and uniform limits of control Lyapunov functions*. in « 41st IEEE Conf. on Decision and Control », Las Vegas (USA), décembre, 2002.
- [23] H. KAMEDA, Y. HOSOKAWA, O. POURTALLIER. *Effects of symmetry on Braess-like paradoxes in distributed computer systems - A numerical study -*. in « IEEE Conference on Decision and Control », Orlando (USA), décembre, 2001.
- [24] J.-P. MARMORAT, M. OLIVI, B. HANZON, R. PEETERS. *Matrix rational  $H^2$ -approximation : a state-space approach using Schur parameters*. in « 41st IEEE Conf. on Decision and Control », Las Vegas (USA), décembre, 2002.
- [25] R. PEETERS, B. HANZON, M. OLIVI. *On a recursive state-space method for discrete-time  $H^2$ -approximation*. in « MTNS 2002 », Notre-Dame (USA), août, 2002.
- [26] F. SEYFERT. *Design of Microwave filters : extracting low pass coupling parameters from measured scattering data*. in « International Workshop On Microwave Filters », CNES et ESA, Toulouse, juin, 2002.

### Rapports de recherche et publications internes

- [27] J. GRIMM. *Outils pour la manipulation du rapport d'activité*. rapport technique, numéro RT-0265, Inria, 2002, <http://www.inria.fr/rrrt/rt-0265.html>.
- [28] A. IVANOV. *Transfert d'orbites en poussée faible*. Rapport de recherche, numéro 4623, INRIA, octobre, 2002, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4623.html>.

### Bibliographie générale

- [29] D. ALPAY, L. BARATCHART, A. GOMBANI. *On the Differential Structure of Matrix-Valued Rational Inner Functions*. in « Operator Theory : Advances and Applications », volume 73, 1994, pages 30-66.

- [30] E. ARANDA-BRICAIRE, C. H. MOOG, J.-B. POMET. *An Infinitesimal Brunovsky Form for Nonlinear Systems with Applications to Dynamic Linearization*. in « Banach Center Publications », volume 32, 1995, pages 19-33.
- [31] Z. ARTSTEIN. *Stabilization with relaxed control*. in « Nonlinear Analysis TMA », volume 7, 1983, pages 1163-1173.
- [32] L. BARATCHART. *Rational and meromorphic approximation in  $L^p$  of the circle : System-theoretic motivations, critical points and error rates*. in « Computational Methods in Function Theory (CMFT'97) », World Scientific Publishing Co., éditeurs N. PAPAMICHAEL, S. RUSCHEWEYH, E. SAFF., pages 1-34, 1998.
- [33] L. BARATCHART, A. BEN ABDA, F. BEN HASSEN, J. LEBLOND. *Pointwise sources recovery and approximation*. en préparation.
- [34] L. BARATCHART, M. CHYBA, J.-B. POMET. *On the Grobman-Hartman theorem for Control Systems*. 2002, en préparation.
- [35] L. BARATCHART, J. GRIMM, J. LEBLOND, J. R. PARTINGTON. *Approximation and interpolation in  $H^2$  : Toeplitz operators, recovery problems and error bounds*. in « Integral Equations and Operator Theory », à paraître.
- [36] L. BARATCHART, R. KÜSTNER. *Pole behaviour in identification*. in « 39th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC) », Sydney (Australie), décembre, 2000.
- [37] L. BARATCHART, R. KÜSTNER, F. MANDRÉA, V. TOTIK. *Pole distribution from orthogonality*. 2002, en préparation.
- [38] L. BARATCHART, J. LEBLOND, J. R. PARTINGTON. *Problems of Adamjan-Arov-Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions*. in « Constructive Approximation », volume 16, 2000, pages 333-357.
- [39] L. BARATCHART, J. LEBLOND, F. SEYFERT. *A pointwise constraint for  $H^2$  approximation on subsets of the circle*. en préparation.
- [40] L. BARATCHART, F. MANDREA, E. SAFF, F. WIELONSKY. *Asymptotic behaviour of poles of rational and meromorphic approximants : Application to 2D inverse problems for the Laplacian*. en préparation.
- [41] L. BARATCHART, H. STAHL, F. WIELONSKY. *Asymptotic uniqueness of best rational approximants of given degree to Markov functions in  $L^2$  of the circle*. in « Constr. Approx. », numéro 1, volume 17, 2001, pages 103-138.
- [42] S. BILA, D. BAILLARGEAT, M. AUBOURG, S. VERDEYME, P. GUILLON, F. SEYFERT, J. GRIMM, L. BARATCHART, C. ZANCHI, J. SOMBRIN. *Direct Electromagnetic Optimization of Microwave Filters*. in « IEEE Microwave Magazine », volume 1, 2001, pages 46-51.
- [43] R. W. BROCKETT. *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization*. in « Differential Geometric Control Theory », série Prog. Math., volume 27, Birkäuser, pages 181-191, Basel-Boston, 1983.

- [44] S. CHAABANE, M. JAOUA, J. LEBLOND. *Parameter identification for Laplace equation and approximation in Hardy classes*. Rapport de recherche, numéro 4295, INRIA, octobre, 2001, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4295.html>, soumis pour publication.
- [45] S. CHAABANE, I. FELLAH, M. JAOUA, J. LEBLOND. *Logarithmic stability estimates for a Robin coefficient in 2D Laplace inverse problems*. en préparation.
- [46] L. FAUBOURG. *Construction de fonctions de Lyapunov contrôlées et stabilisation non-linéaire*. thèse de doctorat, Univ. de Nice - Sophia Antipolis, décembre, 2001.
- [47] L. FAUBOURG, J.-B. POMET. *Control Lyapunov functions for homogeneous « Jurdjevic-Quinn » systems*. in « Control, Optimization, and the Calculus of Variations (COCV) », volume 5, 2000, pages 293-311, <http://www.edpsciences.com/cocv/>.
- [48] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, P. ROUCHON. *Flatness and Defect of Nonlinear Systems : Introductory Theory and Examples*. in « Int. J. of Control », volume 61, 1995, pages 1327-1361.
- [49] E. HANNAN, M. DEISTLER. *The Statistical Theory of Linear Systems*. Wiley, 1988.
- [50] P. MARTIN, R. M. MURRAY, P. ROUCHON. *Flat Systems*. in « European Control Conference, Plenary Lectures and Mini-Courses », éditeurs G. BASTIN, M. GEVERS., pages 211-264, 1997.
- [51] R. PEETERS, B. HANZON, M. OLIVI. *Balanced parametrizations of discrete-time all-pass systems and the tangential Schur algorithm*. in « Proc. of the European Control Conference (cd-rom) », Karlsruhe (Allemagne), septembre, 1999.
- [52] J.-B. POMET. *On the curves that may be approached by trajectories of a smooth control affine system*. in « Syst. & Control Lett. », volume 36, 1999, pages 143-149.
- [53] F. SEYFERT. *Problèmes extrémaux dans les espaces de Hardy, Application à l'identification de filtres hyperfréquences à cavités couplées*. thèse de doctorat, Ecole de Mines de Paris, 1998.
- [54] D. W. STROOCK, S. R. S. VARADHAN. *On the Support of Diffusion Processes with Applications to the Strong Maximum Principle*. in « Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. », volume III (Probability Theory), California University Press, pages 333-359, 1972.