



IN PARTNERSHIP WITH:
**Université de Technologie de
Troyes**

Activity Report 2018

Project-Team GAMMA3

Automatic mesh generation and advanced
methods

RESEARCH CENTER
Saclay - Île-de-France

THEME
Numerical schemes and simulations

Table of contents

1. Team, Visitors, External Collaborators	1
2. Overall Objectives	2
3. Highlights of the Year	3
4. New Software and Platforms	3
4.1. ABL4FLO	3
4.2. AMA4FLO	3
4.3. BL2D	4
4.4. BL2D-ABAQ	4
4.5. BLGEOL	4
4.6. BLMOL	4
4.7. BLSURF	5
4.8. FEFLOA-REMESH	5
4.9. GAMANIC 3D	5
4.10. GAMHIC 3D	5
4.11. GHS3D	6
4.12. HEXOTIC	6
4.13. Nimbus 3D	6
4.14. VIZIR	6
4.15. Wolf	7
4.16. Wolf-Bloom	7
4.17. Wolf-Elast	7
4.18. Wolf-Interpol	7
4.19. Wolf-MovMsh	8
4.20. Wolf-Nsc	8
4.21. Wolf-Spyder	8
5. New Results	8
5.1. The meshing bible	8
5.2. Realistic modeling of fractured geologic media	9
5.3. High order geometric modeling	9
5.4. Rendu pixel-exact de solutions d'ordre élevé	10
5.5. Génération de maillages d'ordre élevé	10
5.6. Adaptation de maillages pour des écoulements visqueux en turbomachine et aéro-externe	10
5.6.1. Calcul	10
5.6.2. Adaptation	11
5.7. Parallel mesh adaptation	11
5.8. Adaptive boundary layer mesh generation	11
5.9. Améliorations des schémas pour les simulation RANS	11
5.10. Deterministic smoothing parallelization	11
5.11. Opérateurs d'optimisation de maillage alignés et maillages quad-dominants	12
5.12. Multi-physic mesh adaptation	12
6. Bilateral Contracts and Grants with Industry	12
6.1. Bilateral Contracts with Industry	12
6.2. Bilateral Grants with Industry	13
7. Partnerships and Cooperations	13
7.1. National Initiatives	13
7.2. International Initiatives	13
7.2.1.1. AM2NS	13
7.2.1.2. MODIS	13
8. Bibliography	14

Project-Team GAMMA3

Creation of the Project-Team: 2010 January 01

Keywords:

Computer Science and Digital Science:

- A2.5. - Software engineering
- A5.2. - Data visualization
- A5.5.1. - Geometrical modeling
- A6.1. - Methods in mathematical modeling
- A6.2. - Scientific computing, Numerical Analysis & Optimization
- A7.1. - Algorithms
- A8.3. - Geometry, Topology

Other Research Topics and Application Domains:

- B5.2.3. - Aviation
- B5.2.4. - Aerospace

1. Team, Visitors, External Collaborators

Research Scientists

- Paul-Louis George [Team leader, Inria, Senior Researcher]
- Frederic Alauzet [Inria, Senior Researcher, HDR]
- Patrick Laug [Inria, Senior Researcher, HDR]
- Adrien Loseille [Inria, Researcher]
- David Marcum [Inria, International Chair, Advanced Research Position]

Faculty Member

- Houman Borouchaki [Univ de technologie de Troyes, Professor]

Post-Doctoral Fellow

- Julien Vanharen [Inria]

PhD Students

- Bastien Andrieu [ONERA]
- Rémi Feuillet [École Nationale Supérieure de Techniques Avancées]
- Loïc Frazza [Ecole polytechnique]
- Lucille Marie Tenkes [Inria, from Oct 2018]

Technical staff

- Victorien Menier [Inria, from Oct 2018, granted by SAFRAN SA]

Interns

- Mathieu Rigal [Inria, from Jun 2018 until Sep 2018]
- Lucille Marie Tenkes [Inria, from Apr 2018 until Sep 2018]

Administrative Assistants

- Jessica Gameiro [Inria, until Apr 2018]
- Maria Agustina Ronco [Inria, from May 2018]

Visiting Scientist

- Nicolas Ringue [MacGill University, until Jul 2018]

External Collaborators

Julia Camargo [Visiting PhD Student, Stanford University, from Oct 2018 until December 2018]
Eléonore Gauci [Univ Pierre et Marie Curie]
David Marcum [Professor, Mississippi State University]
Loïc Marechal [Research Engineer, Distene]

2. Overall Objectives

2.1. Introduction

Un domaine important des sciences de l'ingénieur concerne le calcul des solutions d'équations aux dérivées partielles très variées (en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en modélisation de problèmes thermiques, ...) par la méthode des éléments ou des volumes finis. Ces méthodes utilisent comme support spatial des calculs un maillage du domaine sur lequel les équations sont formulées. Par suite, les algorithmes (de construction) de maillages occupent un rôle primordial dans toute simulation par ces méthodes d'un problème modélisé en équations aux dérivées partielles. En particulier, la précision, voire la validité, des solutions calculées est liée aux propriétés du maillage utilisé [28].

L'équipe-projet GAMMA3 a été créée en 2010 à la suite du projet GAMMA. L'équipe est bilocalisée avec une partie à l'UTT (Troyes) et l'autre à Rocquencourt puis Saclay. Les thèmes du projet regroupent un ensemble d'activités concernant les points indiqués ci-dessus, en particulier, l'aspect génération automatique de maillages afin de construire les supports utilisés par les méthodes d'éléments ou de volumes finis. Sont également étudiés les aspects de modélisation géométrique, de post-traitement et de visualisation des résultats issus de tels calculs [29].

L'évolution de la demande en termes de génération automatique de maillages nécessite une évolution des méthodes classiques de création de maillages vers des méthodes permettant de construire des maillages contrôlés. Les maillages doivent donc être soit isotropes, le contrôle portant sur des tailles souhaitées, soit anisotropes, le contrôle portant à la fois sur des directions et des tailles selon ces dernières.

Le développement d'algorithmes de maillages gouvernés sert de support naturel à la conception de boucles de maillages adaptatifs qui, via un estimateur d'erreurs *a posteriori*, permettent de contrôler la qualité des solutions. Les estimateurs d'erreurs sont issus d'applications en mécanique des fluides (Inria) et du solide (UTT). Leurs validations reposent sur le développement de solveurs avancés, en particulier, en mécanique des fluides. Ces deux points (estimateurs et solveurs) constituent au moins la moitié de nos recherches.

Ces préoccupations amènent à considérer le problème du maillage des domaines de calculs en eux-mêmes tout comme celui du maillage ou du remaillage des courbes et surfaces, frontières de ces domaines.

La taille, en termes de nombre de nœuds, des maillages nécessaires pour certaines simulations, amène à travailler sur la parallélisation des processus de calculs. Cette problématique conduit également à s'intéresser à l'aspect multi-cœurs au niveau des algorithmes de maillages proprement dits.

Simultanément, le volume des résultats obtenus dans de telles simulations, nécessite d'envisager le post-traitement de ces résultats en parallèle ou par des méthodes appropriées.

Par ailleurs, de nombreux problèmes partent de saisies *scanner* (ou autre système discret) des géométries à traiter et demandent d'en déduire des maillages de surfaces aptes à être, par la suite, traités par les méthodes classiques (de remaillage, d'optimisation, de calculs). Cette question, en général mal traitée, reste pertinente.

Enfin, la maturité de certaines méthodes (victimes de leur succès) conduit les utilisateurs à demander plus et à considérer des problèmes de maillage ou des conditions d'utilisations extrêmes induisant des algorithmes *a priori* inattendus.

Les objectifs du projet GAMMA3 consistent à étudier l'ensemble des points mentionnés ci-dessus afin de rendre automatique le calcul de la solution d'un problème donné avec une précision imposée au départ. Par ailleurs, certaines des techniques utilisées dans les problématiques de maillage sont utilisables dans d'autres disciplines (compression d'images pour ne citer qu'un seul exemple).

3. Highlights of the Year

3.1. Highlights of the Year

3.1.1. Awards

- Adrien Loseille. Deuxième Prix FIEEC de la Recherche Appliquée.

4. New Software and Platforms

4.1. ABL4FLO

Adaptive Boundary Layer 4 FLOW

KEYWORDS: Boundary layers - Hybrid meshes

FUNCTIONAL DESCRIPTION: ABL4FLO is a module used to perform adaptive boundary layer mesh adaptation as required in RANS solutions. It is included in Feflo.a/AMG-Lib software. It is based on a constrained version of the cavity operators in order to generate automatically hybrid elements. If a metric surface is provided, the normal and tangential direction are simultaneously adapted.

- Participant: Adrien Loseille
- Contact: Adrien Loseille
- Publications: [Recent Improvements on Cavity-Based Operators for RANS Mesh Adaptation - Unstructured Mesh Generation and Adaptation - Robust Boundary Layer Mesh Generation](#)
- URL: <https://pyamg.saclay.inria.fr/>

4.2. AMA4FLO

Anisotropic Mesh Adaptation 4 FLOW

KEYWORDS: 3D - Mesh adaptation

FUNCTIONAL DESCRIPTION: AMA4Flo is part of Feflo.a which is a robust anisotropic local remeshing software. It is intended for scientific computing with primary applications in aerodynamics and spatial studies. Surface and volume mesh adaptation are handled in a coupled-way. It also includes : - Boundary layers mesh generation for RANS simulations, - CAD re-projection and discrete surface remeshing, with - Hybrid mesh generation for boundary-layers - High-quality quasi-structured grids for complex geometries and complex corners: multi-normals, normals deactivation, ... - Highly anisotropic mesh adaptation, ratios up to 1 million are handled - Anisotropic/Boundary-layer coupling for supersonic shock/boundary layer interaction

The boundary layer module alone (abl4flo) is registered with the APP under nbr. IDDN. FR.001. 080032. 00.S.P.2012. 000.10000

initially, AMA4FLO was mainly focused on Computational Fluid Dynamics (4 FLOW), but it is now used in many applications areas: seismic, reservoir engineering, spatial, hydrodynamics, hemodynamics, ...

- Participant: Adrien Loseille
- Contact: Adrien Loseille
- Publications: [Very High Order Anisotropic Metric-Based Mesh Adaptation in 3D - Computational and Experimental Assessment of Models for the First AIAA Sonic Boom Prediction Workshop Using Adaptive High Fidelity CFD methods - Unique cavity-based operator and hierarchical domain partitioning for fast parallel generation of anisotropic meshes - Unstructured Mesh Generation and Adaptation - A Decade of Progress on Anisotropic Mesh Adaptation for Computational Fluid Dynamics - Metric-orthogonal Anisotropic Mesh Generation - Sonic Boom Assessment of a Hypersonic Transport Vehicle with Advanced Numerical Methods](#)
- URL: <https://pyamg.saclay.inria.fr/>

4.3. BL2D

KEYWORDS: Abstraction - Meshing - Isotropic - Anisotropic - Delaunay - Mesher - Mesh

FUNCTIONAL DESCRIPTION: This software package stems from a former one called BL2D-V1. The meshing method is of controlled Delaunay type, isotropic or anisotropic. The internal point generation follows a frontal logic, and their connection is realised as in a classical Delaunay approach. Quadrilaterals are obtained by a pairing process. The direct construction of degree 2 element has been made possible via the control of the domain boundary mesh, in order to ensure the desired compatibility. The boundary middle nodes are located according to the curvilinear abscissa. The internal middle nodes are, by default, at the middle of the corresponding edges.

RELEASE FUNCTIONAL DESCRIPTION: Par rapport à la version V1, il offre de nombreuses possibilités nouvelles : méthode frontale, triangles quadratiques courbes, quadrilatères de degré 1 ou 2, frontières déformables, allocation dynamique de mémoire, etc

- Participants: Houman Borouchaki and Patrick Laug
- Contact: Patrick Laug
- URL: <http://pages.saclay.inria.fr/patrick.laug/logiciels/logiciels.html>

4.4. BL2D-ABAQ

KEYWORDS: Anisotropic - Delaunay - Automatic mesher - Meshing - Mesher - Mesh

FUNCTIONAL DESCRIPTION: The meshing method is the same as BL2D in an adaptive process. An a posteriori error estimation of a solution at the nodes of the current mesh results in a size map. A new mesh satisfying these size specifications (made continuous) is built, and the solution is interpolated on the new mesh.

- Participants: Abel Cherouat, Houman Borouchaki and Patrick Laug
- Contact: Patrick Laug
- URL: <http://pages.saclay.inria.fr/patrick.laug/logiciels/logiciels.html>

4.5. BLGEOL

KEYWORDS: Automatic mesher - Geologic structure - Meshing - Mesher - Mesh

FUNCTIONAL DESCRIPTION: BLGEOL-V1 software can generate hex-dominant meshes of geologic structures complying with different geometric constraints: surface topography (valleys, reliefs, rivers), geologic layers and underground workings. First, a reference 2D domain is obtained by projecting all the line constraints into a horizontal plane. Different size specifications are given for rivers, outcrop lines and workings. Using an adaptive methodology, the size variation is bounded by a specified threshold in order to obtain a high quality quad-dominant mesh. Secondly, a hex-dominant mesh of the geological medium is generated by a vertical extrusion, taking into account the surfaces found (interfaces between two layers, top or bottom faces of underground workings). The generation of volume elements follows a global order established on the whole set of surfaces to ensure the conformity of the resulting mesh.

- Participants: Houman Borouchaki and Patrick Laug
- Contact: Patrick Laug
- URL: <http://pages.saclay.inria.fr/patrick.laug/logiciels/logiciels.html>

4.6. BLMOL

KEYWORDS: Mesher - Molecular surface - Meshing - Mesh

SCIENTIFIC DESCRIPTION: An increasingly important part of quantum chemistry is devoted to molecular surfaces. To model such a surface, each constituting atom is idealized by a simple sphere. Surface mesh generation techniques are then used either for visualization or for simulation, where mesh quality has a strong influence on solution accuracy. First, a boundary representation (B-rep) of the surface is obtained, i.e. a set of patches and the topological relations between them. Second, an appropriate parameterization and a metric map are computed for each patch. Third, meshes of the parametric domains are generated with respect to an induced metric map, using a combined advancing-front generalized-Delaunay approach. Finally these meshes are mapped onto the entire surface. Several application examples illustrate various capabilities of our method.

FUNCTIONAL DESCRIPTION: BLMOL is a molecular surface mesher.

- Participants: Houman Borouchaki and Patrick Laug
- Contact: Patrick Laug
- URL: <http://pages.saclay.inria.fr/patrick.laug/logiciels/logiciels.html>

4.7. BLSURF

KEYWORDS: Automatic mesher - Meshing - Mesher - Mesh

FUNCTIONAL DESCRIPTION: An indirect method for meshing parametric surfaces conforming to a user-specifiable size map is used. First, from this size specification, a Riemannian metric is defined so that the desired mesh is one with unit length edges with respect to the related Riemannian space (the so-called

- Participants: Houman Borouchaki and Patrick Laug
- Partner: Université de Technologie de Troyes
- Contact: Patrick Laug
- URL: <http://pages.saclay.inria.fr/patrick.laug/logiciels/logiciels.html>

4.8. FEFLOA-REMESH

KEYWORDS: Scientific calculation - Anisotropic - Mesh adaptation

FUNCTIONAL DESCRIPTION: FEFLOA-REMESH is intended to generate adapted 2D, surface and volume meshes by using a unique cavity-based operator. The metric-aligned or metric-orthogonal approach is used to generate high quality surface and volume meshes independently of the anisotropy involved.

- Participants: Adrien Loseille and Frédéric Alauzet
- Contact: Adrien Loseille
- URL: <https://www.rocq.inria.fr/gamma/Adrien.Loseille/index.php?page=softwares>

4.9. GAMANIC 3D

KEYWORDS: Tetrahedral mesh - Delaunay - Anisotropic size and direction control - Automatic mesher

FUNCTIONAL DESCRIPTION: GAMANIC3D is a volume mesher governed by a (anisotropic) size and directional specification metric field.

- Participants: Adrien Loseille, Éric Saltel, Frédéric Alauzet, Frederic Hecht, Houman Borouchaki and Paul Louis George
- Contact: Paul Louis Georges
- URL: <http://www.meshgems.com/volume-meshing.html>

4.10. GAMHIC 3D

KEYWORDS: Tetrahedral mesh - Delaunay - Isotropic - Automatic mesher

FUNCTIONAL DESCRIPTION: GAMHIC3D is a volume mesher governed by a (isotropic) size specification metric field.

- Participants: Adrien Loseille, Éric Saltel, Frédéric Alauzet, Frederic Hecht, Houman Borouchaki and Paul Louis George
- Contact: Paul Louis George
- URL: <http://www.meshgems.com/volume-meshing.html>

4.11. GHS3D

KEYWORDS: Tetrahedral mesh - Delaunay - Automatic mesher

FUNCTIONAL DESCRIPTION: GHS3D is an automatic volume mesher

- Participants: Adrien Loseille, Éric Saltel, Frédéric Alauzet, Frederic Hecht, Houman Borouchaki and Paul Louis George
- Contact: Paul Louis George
- URL: <http://www.meshgems.com/volume-meshing.html>

4.12. HEXOTIC

KEYWORDS: 3D - Mesh generation - Meshing - Unstructured meshes - Octree/Quadtree - Multi-threading - GPGPU - GPU

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Input: a triangulated surface mesh and an optional size map to control the size of inner elements.

Output: a fully hexahedral mesh (no hybrid elements), valid (no negative jacobian) and conformal (no dangling nodes) whose surface matches the input geometry.

The software is a simple command line that requires no knowledge on meshing. Its arguments are an input mesh and some optional parameters to control elements sizing, curvature and subdomains as well as some features like boundary layers generation.

- Participant: Loïc Maréchal
- Partner: Distene
- Contact: Loïc Maréchal
- URL: <https://team.inria.fr/gamma3/project-presentation/gamma-software/hexotic/>

4.13. Nimbus 3D

KEYWORDS: Surface reconstruction - Point cloud

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Nimbus3D is a surface reconstruction method piece of software

- Participants: Houman Borouchaki and Paul Louis George
- Contact: Paul Louis George
- URL: <http://www.meshgems.com/volume-meshing.html>

4.14. VIZIR

Interactive visualization of hybrid, curbed and high-order mesh and solution

KEYWORD: Mesh

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Vizir is a light, simple and interactive mesh visualization software, including : (i) A curved meshes visualizer: it handles high order elements and solutions, (ii) Hybrid elements mesh visualization (pyramids, prisms, hexahedra), (iii) Solutions visualization : clip planes, capping, iso-lines, iso-surfaces.

- Participants: Adrien Loseille and Rémi Feuillet
- Contact: Adrien Loseille
- Publication: [Vizir: High-order mesh and solution visualization using OpenGL 4.0 graphic pipeline](#)
- URL: <http://vizir.inria.fr>

4.15. Wolf

KEYWORD: Scientific calculation

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Numerical solver for the Euler and compressible Navier-Stokes equations with turbulence modelling. ALE formulation for moving domains. Modules of interpolation, mesh optimisation and moving meshes. Wolf is written in C++, and may be later released as an opensource library. FELiScE was registered in July 2014 at the Agence pour la Protection des Programmes under the Inter Deposit Digital Number IDDN.FR.001.340034.000.S.P.2014.000.10000.

- Participants: Adrien Loseille and Frédéric Alauzet
- Contact: Frédéric Alauzet
- URL: http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/code_eng.html#Wolf-Nsc

4.16. Wolf-Bloom

KEYWORD: Scientific calculation

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Wolf-Bloom is a structured boundary layer mesh generator using a pushing approach. It start from an existing volume mesh and insert a structured boundary layer by pushing the volume mesh. The volume mesh deformation is solved with an elasticity analogy. Mesh-connectivity optimizations are performed to control volume mesh element quality.

- Participants: Adrien Loseille, David Marcum and Frédéric Alauzet
- Contact: Frédéric Alauzet
- URL: http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/code_eng.html

4.17. Wolf-Elast

KEYWORD: Scientific calculation

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Wolf-Elast is a linear elasticity solver using the P1 to P3 Finite-Element method. The Young and Poisson coefficient can be parametrized. The linear system is solved using the Conjugate Gradient method with the LUSGS preconditioner.

- Participants: Adrien Loseille and Frédéric Alauzet
- Contact: Frédéric Alauzet
- URL: http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/code_eng.html

4.18. Wolf-Interpol

KEYWORD: Scientific calculation

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Wolf-Interpol is a tool to transfer scalar, vector and tensor fields from one mesh to another one. Polynomial interpolation (from order 2 to 4) or conservative interpolation operators can be used. Wolf-Interpol also extract solutions along lines or surfaces.

- Participants: Adrien Loseille and Frédéric Alauzet
- Contact: Frédéric Alauzet
- URL: http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/code_eng.html

4.19. Wolf-MovMsh

KEYWORD: Scientific calculation

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Wolf-MovMsh is a moving mesh algorithm coupled with mesh-connectivity optimization. Mesh deformation is computed by means of a linear elasticity solver or a RBF interpolation. Smoothing and swapping mesh optimization are performed to maintain good mesh quality. It handles rigid bodies or deformable bodies, and also rigid or deformable regions of the domain. High-order meshes are also handled

- Participants: Adrien Loseille and Frédéric Alauzet
- Contact: Paul Louis George
- URL: http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/code_eng.html

4.20. Wolf-Nsc

KEYWORD: Scientific calculation

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Wolf-Nsc is numerical flow solver solving steady or unsteady turbulent compressible Euler and Navier-Stokes equations. The available turbulent models are the Spalart-Almaras and the Menter SST k-omega. A mixed finite volume - finite element numerical method is used for the discretization. Second order spatial accuracy is reached thanks to MUSCL type methods. Explicit or implicit time integration are available. It also resolved dual (adjoint) problem and compute error estimate for mesh adaptation.

- Participants: Adrien Loseille and Frédéric Alauzet
- Contact: Frédéric Alauzet
- URL: http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/code_eng.html

4.21. Wolf-Spyder

KEYWORD: Scientific calculation

FUNCTIONAL DESCRIPTION: Wolf-Spyder is a metric-based high-order mesh quality optimizer using vertex smoothing and edge/face swapping.

- Participants: Adrien Loseille and Frédéric Alauzet
- Contact: Frédéric Alauzet
- URL: http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/code_eng.html

5. New Results

5.1. The meshing bible

Participants: Paul-Louis George [The Boss], Houman Borouchaki, Frédéric Alauzet, Patrick Laug, Adrien Loseille, Loïc Maréchal.

Un projet important, initié en 2017, et amené à se poursuivre l'an prochain, consiste à écrire noir sur blanc un livre (en plusieurs volumes) et la motivation de ce travail est détaillée dans ce qui suit.

Pourquoi ce livre, pourquoi 2 volumes, pourquoi pas 3 volumes?

Notre dernier livre (généraliste) sur le maillage date de 2000 avec une mise à jour en 2008. Un collègue a commis un nouveau livre en 2015, très bien écrit mais assez classique dans son contenu, loin de préoccupations industrielles et (!) contenant quelques énormités (pas assez d'expérience sur de vrais problèmes).

Ajoutons ma facilité (c'est P.L. G. qui parle) à écrire (bien ou mal, là n'est pas la question, il me suffit en effet de taper sur quelques touches d'un clavier), le désir de mon (premier) co-auteur de marquer le coup dans le domaine et la volonté (à leur corps défendant) des autres co-auteurs de participer à cette aventure. Le tout couplé avec les récents progrès dans le domaine (pensons aux éléments courbes et aux méthodes d'ordre élevé mais aussi à ce que peut être le HPC dans le domaine), tous les ingrédients sont là, on y va.

Le premier jet (un seul volume) se montre impossible à réaliser, il faudrait au minimum 800 pages, donc deux volumes a minima. Les deux volumes finis, ne reste il pas la place pour un troisième volume. Constatant avec effroi que nos étudiants (mais pas seulement) maîtrisent bien force concepts mais sont incapables de voir, en pratique, comment les mettre en musique, le troisième volume est apparu comme une évidence (et on sera, au total, autour de 1000 pages).

A qui s'adresse ces volumes, bonne question. Ce n'est pas précisément de la littérature de gare mais nous nous sommes efforcé de prendre le malheureux lecteur par la main pour l'amener progressivement vers des concepts (très) avancés. Ainsi, le livre est très verbose et, en aucun cas, n'est un étalage savant de théorèmes et autres propositions, ce qui n'empêche pas de dire les choses. Par ailleurs, nous avons délibérément mis une part de subjectivité dans le propos pour suggérer (cela pouvant être contredit) que telle ou telle méthode n'avait pas notre faveur. A titre personnel, je pense que, bien que rares dans les livres, ces opinions ne peuvent qu'aider le lecteur à se former sa propre idée sur tel ou tel point.

Les livres sont publiés chez ISTE et écrits en français, eh oui, mais une traduction en anglais est avalable chez Wiley. La présence de la langue française dans la littérature scientifique me semble importante (et rejoint la politique de mon (notre) éditeur). Pour conclure, c'est plutôt satisfaisant de penser que ces livres (peut être destinés à faire référence sur le sujet) sont issus de l'Inria dans le neuf un.

5.2. Realistic modeling of fractured geologic media

Participants: Patrick Laug [correspondant], Géraldine Pichot.

This study started in 2016, in collaboration with the project-team Serena, aims to model, in a realistic and efficient manner, natural fractured media. These media are characterized by their diversity of structures and organizations. Numerous studies in the past decades have evidenced the existence of characteristic structures at multiple scales. At fracture scale, the aperture distribution is widely correlated and heterogeneous. At network scale, the topology is complex resulting from mutual mechanical interactions as well as from major stresses. Geometric modeling of fractured networks combines in a non-standard way a large number of 2D fractures interconnected in the 3D space. Intricate local configurations of fracture intersections require original methods of geometric modeling and mesh generation. Significant progress has been made during this year 2018, as we are now able to make geometric models and numerical simulations with more than 1 million fractures, 2 million intersections, and 18 million triangles, in about one hour on a laptop [7], [8], [19], [20], [21].

5.3. High order geometric modeling

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

In the area of geometric modeling, major challenges are linked to the efficient **visualization** of CAD surfaces and to the generation of **meshes** adapted to numerical simulation. In this context, the elaboration and implementation of a **discrete geometric model** provides a simple and universal representation model, without the need for CAD. A first study has been carried out for a model of degree 1 (one) defined by a "triangulation" composed of quadrilaterals and triangles. The advantage of this model of degree 1 lies in its geometric simplicity. However, in the case of complex surfaces, it may require a very large number of elements, and besides it is not sufficiently rich to give certain essential characteristics like geometric curvatures. The main goal of this project is to extend this discrete model of degree 1 to **higher degrees**. These studies are conducted by "MODIS", an Associate Team comprising members of research teams at Inria, UTT (France) and Polytechnique Montreal (Canada) from 2017 to 2019. This year (2018) has been mostly devoted to the software implementation of all the theoretical bases obtained last year. In particular, chapters 6 and 11 of a recent book [22] give data structures where a local numbering is recursively defined for any order of the elements.

5.4. Rendu pixel-exact de solutions d'ordre élevé

Participants: Adrien Loseille [correspondant], Rémi Feuillet.

Avec le développement des méthodes d'ordre élevé, il apparaît également important de visualiser de manière fidèle à la fois le maillage et la solution associée. L'objet de cette thématique de recherche est de mettre à profit les fonctionnalités de programmation du pipeline graphique de la bibliothèque graphique OpenGL 4.0 afin de mettre en place des techniques de rendu de solutions d'ordre élevé quasiment exactes au pixel près ainsi que des techniques rapides de visualisation d'éléments d'ordre élevé. Les premiers résultats sont très satisfaisants avec un rendu de solutions d'ordre élevé allant de l'ordre 1 à 5 et ce exact au pixel près si ces dernières sont représentées sur des maillages de degré 1. Au niveau de la représentation des éléments d'ordre élevé, la visualisation est possible jusqu'à l'ordre 4 avec visualisation d'une solution dessus. Cette dernière sera d'autant plus représentée au pixel près que la représentation de la géométrie courbe (pour des degrés plus grands que 1) sera exacte. Ce travail a fait en 2018 l'objet de deux exposés à des conférences, dont une publication [13] dans les *proceedings: AIAA Scitech* et *WCCM*. Les prochaines étapes vont se concentrer sur la représentation de solutions et d'éléments d'ordre élevés à travers un plan de coupe, à la représentation des iso-surfaces et enfin à l'optimisation de ce code.

5.5. Génération de maillages d'ordre élevé

Participants: Frédéric Alauzet [correspondant], Adrien Loseille, Rémi Feuillet, David Marcum.

En calcul scientifique, l'utilisation de solveurs d'ordre élevé (supérieur à deux) se fait croissante. Or ces solveurs ne sont fonctionnels que lorsqu'ils sont couplés avec des maillages d'ordre élevé, nécessaires pour une représentation d'ordre élevé de la géométrie. L'idée de cette thématique de recherche est de s'intéresser à la génération et à l'*amélioration* par modification locale de tels maillages. Dans cette optique, un générateur de maillages courbe en partant de maillages droit a été développé. Ensuite, une étude importante a été consacrée à la généralisation au degré 2 des opérateurs locaux classiques d'optimisation de maillage, à savoir la bascule d'arête/face (*swap*) et le bougé de point (*smoothing*). La généralisation de tels outils a permis d'une part de rendre la génération de maillages courbe plus robuste et d'autre part rendu possibles au degré 2 les techniques de maillage mobile avec changement local de connectivité. Ce travail a fait l'objet en 2018 de deux exposés sans *proceedings* à *ECCM-ECFD* et *ICOSAHOM* et de 2 exposés avec *peer-reviewed proceedings* à *AIAA Aviation* et à l'*International Meshing Roundtable* [9], [10]. La suite de ce travail va être de générer des maillages de couche limites directement courbes (en utilisant la technique de maillage courbe mobile) puis de se consacrer à la généralisation de ce travail à des ordres plus grands. Il sera aussi apporté un soin particulier à la génération de maillages de surface courbe à partir de modèles de CAO.

5.6. Adaptation de maillages pour des écoulements visqueux en turbomachine et aéro-externe

Participants: Frédéric Alauzet, Loïc Frazza, Adrien Loseille [correspondant].

5.6.1. Calcul

Les principes d'une adaptation pour les écoulements Navier-Stokes turbulents ont été validés sur des calculs de turbomachine. Pour ce faire nous avons tout d'abord traité les particularités liées aux calculs en turbomachine:

- Les aubes présentent en général une périodicité par rotation, on ne simule donc qu'une période afin d'alléger les calculs. Il faut donc traiter cette périodicité de façon appropriée dans le code CFD et l'adaptation de maillage.
- Afin de prendre en compte la rotation des pales sans employer de maillages mobiles et simulations instationnaires on peut se placer dans le référentiel tournant de l'aube en corrigeant les équations.
- Les écoulements en turbomachine sont des écoulements clos, les conditions limites d'entrée et de sortie ont donc une influence très forte et peuvent de plus se trouver très près de la turbine afin de simuler la présence d'autres étages en amont ou en aval. Des conditions limites bien précises ont donc été développées afin de traiter correctement ces effets.

5.6.2. Adaptation

Pour l'adaptation de maillages deux particularités doivent être traitées ici, la périodicité du maillage et la couche limite turbulente. En toute dimension, la couche limite a donc été traitée par des techniques d'adaptation. Le maillage est adapté dans le volume en utilisant la Hessienne du Mach de l'écoulement comme senseur. La périodicité est traitée en utilisant un noyau non-manifold de logiciel de remaillage Feflo.a.

Ces développements ont été présentés dans plusieurs conférences internationales et sont détaillés dans la thèse de Loïc Frazza [1], et dans le cadre d'une collaboration avec Safran Tech.

5.7. Parallel mesh adaptation

Participants: Frédéric Alauzet, Adrien Loseille [correspondant].

We devise a strategy in order to generate large-size adapted anisotropic meshes $O(10^8 - 10^9)$ as required in many fields of application in scientific computing. We target moderate scale parallel computational resources as typically found in R&D units where the number of cores ranges in $O(10^2 - 10^3)$. Both distributed and shared memory architectures are handled. Our strategy is based on hierarchical domain splitting algorithm to remesh the partitions in parallel. Both the volume and the surface mesh are adapted simultaneously and the efficiency of the method is independent of the complexity of the geometry. The originality of the method relies on (i) a metric-based static load-balancing, (ii) dedicated hierarchical mesh partitioning techniques to (re)split the (complex) interfaces meshes, (iii) anisotropic Delaunay cavity to define the interface meshes, (iv) a fast, robust and generic sequential cavity-based mesh modification kernel, and (v) out-of-core storing of completing parts to reduce the memory footprint. We are able to generate (uniform, isotropic and anisotropic) meshes with more than 1 billion tetrahedra in less than 20 minutes on 120 cores.

5.8. Adaptive boundary layer mesh generation

Participants: Adrien Loseille [correspondant], Victorien Menier.

Si des méthodes traditionnelles de couches limites sont désormais matures, elles sont souvent incompatibles dans un contexte adaptatif où les tailles varient dans la couche limite. On a développé dans ce cadre une méthode d'adaptation de la couche limite à la fois dans la direction normale et dans le plan tangent basée sur un couplage entre un opérateur de cavité contraint et une adaptation de surface interne.

5.9. Améliorations des schémas pour les simulation RANS

Participants: Loïc Frazza, Frédéric Alauzet [correspondant].

Grâce à une implémentation adéquate de schémas numériques modernes, nous avons montré qu'il est possible de réaliser des simulations RANS sur des maillages tétraédriques non structurés. Nous avons ainsi pu réaliser des calculs sur des maillages adaptés pour différentes applications industrielles complexes. A cette fin, nous avons réalisé l'analyse mathématiques nécessaire au développement des senseurs d'erreurs turbulents efficaces et précis. Nous avons également été amenés à étendre la résolution des variables adjointes aux modèles RANS. En comparant les performances de cette stratégie d'adaptation, nous avons pu montrer la supériorité des résultats obtenus en comparaison des méthodes hessiennes et traditionnelles sur différentes applications. Tous ces développements ont été validés dans le solveur Wolf, présentés et publiés dans [12], [6], [15] et ont été développés dans le cadre des collaborations avec Boeing et Safran Tech.

5.10. Deterministic smoothing parallelization

Participants: Lucille-Marie Tenkès, Frédéric Alauzet [correspondant].

On élabore des solutions algorithmiques pour paralléliser un opérateur géométrique d'optimisation de maillage, le bougé de points : une solution non-dynamique et une solution dynamique.

Le but est de paralléliser les méthodes de bougé de points de manière déterministe. En effet, avec les algorithmes actuels, le résultat de l'optimisation dépend de l'ordre dans lequel les points sont traités, qui n'est pas prévisible en parallélisation multi-thread asynchrone. Cela devient problématique lorsqu'on insère cette étape dans un processus global. S'il survient une erreur, on ne pourra pas reproduire les cas invalides pour apporter des corrections. Une première idée a été de rendre les calculs d'optimisation déterministes en implémentant une méthode non dynamique, qui prend comme référence pour le calcul des positions optimales la configuration initiale et non la configuration en cours d'optimisation. Une relaxation est effectuée une fois toutes les positions optimales calculées, et elle est globale. Cela permet d'avoir un bougé de points vraiment indépendant de l'ordre dans lequel les points sont traités. Cette méthode est bien déterministe, mais l'algorithme est moins efficace et plus lent que les méthodes de bougé de points dynamiques. L'alternative dynamique consiste à agir directement sur la parallélisation, en regroupant les points de manière à ne pas laisser les calculs interférer. L'idée est de créer une partition des nœuds en mettant dans une même classe ceux qui ne sont pas reliés entre eux par une arête. Ainsi, si l'un d'entre eux bouge lors du processus d'optimisation, il n'impactera pas ceux de sa classe. Cela revient donc à colorier ces sommets, de sorte que deux nœuds reliés par une arête n'aient pas la même couleur. L'algorithme choisi effectue un coloriage de proche en proche (approche frontale). La couleur 1 est attribuée au premier sommet, les points de sa boule sont coloriés par élimination, et ainsi de suite. Ces algorithmes ont été testés sur des maillages 2D et 3D pour caractériser leurs performances. Il en ressort que la méthode dynamique est assez efficace et rapide pour être appliquée à des maillages 3D de grande taille. De plus, l'étape de partition a été elle-même parallélisée et optimisée.

5.11. Opérateurs d'optimisation de maillage alignés et maillages quad-dominants

Participants: Lucille-Marie Tenkès, Frédéric Alauzet [correspondant].

On se base ici sur les méthodes de maillage par alignement des éléments sur la métrique. C'est-à-dire que les éléments du maillage, en plus de présenter une taille adaptée à la solution, suivent une direction prescrite. Une des difficultés ressortant de cette méthode est l'optimisation par bougé de points, car cela rompt l'alignement. On veut donc ici mettre en place une technique de bougé de points permettant de corriger, sans en détruire la structure, un maillage généré par alignement sur la métrique. Les modifications apportées à l'optimiseur sont un opérateur de réduction d'arête, une procédure d'appariement en quadrilatères, et un opérateur de bougé de points utilisant ces quadrilatères.

5.12. Multi-physic mesh adaptation

Participants: Frédéric Alauzet [correspondant], Rémi Feuillet, Julien Vanharen.

A new strategy [18] for mesh adaptation dealing with Fluid-Structure Interaction (FSI) problems is presented using a partitioned approach. The Euler equations are solved by an edge-based Finite Volume solver whereas the linear elasticity equations are solved by the Finite Element Method using the Lagrange P1 elements. The coupling between both codes is realized by imposing boundary conditions. Small displacements of the structure are assumed and so the mesh is not deformed. The computation of a well-documented FSI test case is finally carried out to perform validation of this new strategy. The capability of treating three-dimensional complex cases is also demonstrated.

6. Bilateral Contracts and Grants with Industry

6.1. Bilateral Contracts with Industry

- Boeing
- Safran Tech

6.2. Bilateral Grants with Industry

- Projet RAPID DGA

7. Partnerships and Cooperations

7.1. National Initiatives

7.1.1. ANR

7.1.1.1. ANR IMPACTS 2018-2021

Ideal Mesh generation for modern solvers and computing ArchitectureS.

- Coordinateur : Adrien Loseille
- The rapid improvement of computer hardware and physical simulation capabilities has revolutionized science and engineering, placing computational simulation on an equal footing with theoretical analysis and physical experimentation. This rapidly increasing reliance on the predictive capabilities has created the need for rigorous control of numerical errors which strongly impact these predictions. A rigorous control of the numerical error can be only achieved through mesh adaptivity. In this context, the role of mesh adaptation is prominent, as the quality of the mesh, its refinement, and its alignment with the physics are major contributions to these numerical errors. The IMPACTS project aims at pushing the envelope in mesh adaptation in the context of large size, very high fidelity simulations by proposing a new adaptive mesh generation framework. This framework will be based on new theoretical developments on Riemannian metric-field and on innovative algorithmic developments coupling a unique cavity-operator with an advancing-point techniques in order to produce high quality hybrid, curved and adapted meshes.

7.2. International Initiatives

7.2.1. Inria Associate Teams Not Involved in an Inria International Labs

7.2.1.1. AM2NS

Title: Advanced Meshing Methods for Numerical Simulations

International Partner (Institution - Laboratory - Researcher):

Mississippi State University (United States) - Center for Advanced Vehicular Systems - Computational Fluid Dynamics Dept. (CAVS-CFD) - Marcum David

Start year: 2017

See also: http://pages.saclay.inria.fr/frederic.alauzet/AssociateTeam_AM2NS/AT_am2ns.html

The purpose of the AM2NS Associate Team is to mutualize the knowledge of all teams in order to develop the next generation of meshing methods and their parallelization to address the new challenges in numerical simulations for industrial problems. The Associate Team is composed of four partners: Inria, Mississippi State University, The Boeing Company and Massachusetts Institute of Technology.

7.2.1.2. MODIS

Title: High-order discrete geometric modeling

International Partner (Institution - Laboratory - Researcher):

Polytechnique Montréal (Canada) - Computer Science - François Guibault

Start year: 2017

See also: <http://pages.saclay.inria.fr/patrick.laug/MODIS/MODIS.html>

In the area of geometric modeling, major challenges are linked to the efficient visualization of CAD surfaces and to the generation of meshes adapted to numerical simulation. In this context, the conception of a discrete geometric model provides a simple and universal representation model, without the need for CAD. A first study has been carried out for the conception of a model of order 1 (one) defined by a 'triangulation' composed of quadrilaterals and triangles. The advantage of this model of order 1 lies in its geometric simplicity. However, in the case of complex surfaces, it may require a very large number of elements, and besides it is not sufficiently rich to give certain essential characteristics like geometric curvatures. The main goal of this project is to extend this discrete model of order 1 to higher orders.

8. Bibliography

Publications of the year

Doctoral Dissertations and Habilitation Theses

- [1] L. FRAZZA. *3D anisotropic mesh adaptation for Reynolds Averaged Navier-Stokes simulations*, Sorbonne Université, UPMC, December 2018, <https://hal.inria.fr/tel-01962318>

Articles in International Peer-Reviewed Journals

- [2] T. AMARI, A. CANOU, J.-J. ALY, F. DELYON, F. ALAUZET. *Magnetic cage and rope as the key for solar eruptions*, in "Nature", February 2018, vol. 554, n^o 7691, pp. 211 - 215 [DOI : 10.1038/NATURE24671], <https://hal-cea.archives-ouvertes.fr/cea-01872913>
- [3] S. CHAILLAT, S. P. GROTH, A. LOSEILLE. *Metric-based anisotropic mesh adaptation for 3D acoustic boundary element methods*, in "Journal of Computational Physics", November 2018, vol. 372, pp. 473 - 499 [DOI : 10.1016/J.JCP.2018.06.048], <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01895636>
- [4] T. GROSGES, D. BARCHIESI. *Geometrical optimization of nanostrips for surface plasmon excitation: an analytical approach*, in "Optics Letters", 2018, vol. 43, n^o 1, pp. 54-57 [DOI : 10.1364/OL.43.000054], <https://hal.inria.fr/hal-01804193>
- [5] T. GROSGES, D. BARCHIESI. *Gold Nanoparticles as a Photothermal Agent in Cancer Therapy: The Thermal Ablation Characteristic Length*, in "Molecules", May 2018, vol. 23, n^o 6, 13 p. [DOI : 10.3390/MOLECULES23061316], <https://hal.inria.fr/hal-01804012>
- [6] A. LOSEILLE, L. FRAZZA, F. ALAUZET. *Comparing anisotropic adaptive strategies on the 2nd AIAA sonic boom workshop geometry*, in "Journal of Aircraft", November 2018, pp. 1-15, <https://hal.inria.fr/hal-01962175>

Invited Conferences

- [7] G. PICHOT, P. LAUG, J. ERHEL, R. LE GOC, C. DARCEL, P. DAVY, J.-R. DE DREUZY. *Flow simulations in geology-based Discrete Fracture Networks*, in "2018 - Reactive Flows in Deformable, Complex Media", Oberwolfach, Germany, August 2018, pp. 1-3, <https://hal.inria.fr/hal-01900605>
- [8] G. PICHOT, P. LAUG, R. LE GOC, C. DARCEL, P. DAVY, J.-R. DE DREUZY. *Computation of flow properties of large scale fractured media*, in "InterPore 2018 - 10th Annual Meeting and Jubilee", New Orleans, United States, June 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01900599>

International Conferences with Proceedings

- [9] R. FEUILLET, A. LOSEILLE, F. ALAUZET. *P2 mesh optimization operators*, in "27th International Meshing Roundtable", Albuquerque, United States, October 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01962132>
- [10] R. FEUILLET, A. LOSEILLE, D. MARCUM, F. ALAUZET. *Connectivity-change moving mesh methods for high-order meshes: Toward closed advancing-layer high-order boundary layer mesh generation*, in "2018 Fluid Dynamics Conference, AIAA AVIATION Forum", Atlanta, United States, June 2018 [DOI : 10.2514/6.2018-4167], <https://hal.inria.fr/hal-01962129>
- [11] L. FRAZZA, A. LOSEILLE, F. ALAUZET, A. DERVIEUX. *Nonlinear corrector for RANS equations*, in "2018 Fluid Dynamics Conference, AIAA AVIATION Forum", Atlanta, France, June 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01962171>
- [12] L. FRAZZA, A. LOSEILLE, F. ALAUZET. *Mesh adaptation strategies using wall functions and low-Reynolds models*, in "2018 Fluid Dynamics Conference, AIAA AVIATION Forum", Atlanta, United States, June 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01962178>
- [13] A. LOSEILLE, R. FEUILLET. *Vizir: High-order mesh and solution visualization using OpenGL 4.0 graphic pipeline*, in "2018 - AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum", kissimmee, United States, January 2018, pp. 1-13 [DOI : 10.2514/6.2018-1174], <https://hal.inria.fr/hal-01686714>
- [14] A. LOSEILLE. *Recent Improvements on Cavity-Based Operators for RANS Mesh Adaptation*, in "2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting", Kissimmee, United States, January 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01962190>
- [15] T. A. MICHAL, F. ALAUZET, A. LOSEILLE, L. FRAZZA, D. MARCUM, D. KAMENETSKIY. *Comparing Anisotropic Error Estimates for the Onera M6 Wing RANS Simulations*, in "2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting", Kissimmee, United States, January 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01962254>
- [16] E. MONTREUIL, W. GHEDHAIFI, V. CHMIELARSKI, V. FRANÇOIS, F. GAND, A. LOSEILLE. *Numerical Simulation of contrail formation on the Common Research Model wing/body/engine configuration*, in "AIAA Aviation and Aeronautics Forum and Exposition 2018", Atlanta, United States, June 2018, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01961143>
- [17] M. A. PARK, N. BARRAL, D. IBANEZ, D. KAMENETSKIY, J. J. KRAKOS, T. A. MICHAL, A. LOSEILLE. *Unstructured Grid Adaptation and Solver Technology for Turbulent Flows*, in "2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting", Kissimmee, United States, January 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01962247>
- [18] J. VANHAREN, R. FEUILLET, F. ALAUZET. *Mesh adaptation for fluid-structure interaction problems*, in "2018 Fluid Dynamics Conference, AIAA AVIATION Forum", Atlanta, United States, June 2018 [DOI : 10.2514/6.2018-3244], <https://hal.inria.fr/hal-01962204>

Conferences without Proceedings

- [19] P. LAUG, G. PICHOT, R. LE GOC, C. DARCEL, P. DAVY. *Automatic meshing of Discrete Fracture Networks*, in "Computational Methods in Water Resources XXII (CMWR 2018)", Saint-Malo, France, June 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01896927>

- [20] P. LAUG, G. PICHOT. *Simulations in large tridimensional Discrete Fracture Networks (DFN): I. Geometric modeling and mesh generation*, in "MASCOT 2018 - 15th IMACS/ISGG meeting on applied scientific computing and tools", Rome, Italy, October 2018, pp. 1-2, <https://hal.inria.fr/hal-01896881>
- [21] G. PICHOT, P. LAUG, J. ERHEL, R. LE GOC, C. DARCEL, P. DAVY, J.-R. DE DREUZY. *Simulations in large tridimensional Discrete Fracture Networks (DFN): II. Flow simulations*, in "MASCOT 2018 -15th IMACS/ISGG meeting on applied scientific computing and tools", Rome, Italy, October 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01896900>

Scientific Books (or Scientific Book chapters)

- [22] P.-L. GEORGE, H. BOROUCAKI, F. ALAUZET, P. LAUG, A. LOSEILLE, L. MARÉCHAL. *Maillage, modélisation géométrique et simulation numérique 2*, Iste Editions, 2018, <https://hal.inria.fr/hal-01962201>

Research Reports

- [23] H. GUILLARD, J. LAKHLILI, A. LOSEILLE, A. LOYER, B. NKONGA, A. RATNANI, A. ELARIF. *Tokamesh : A software for mesh generation in Tokamaks*, CASTOR, December 2018, n^o RR-9230, <https://hal.inria.fr/hal-01948060>

Other Publications

- [24] A. BELME, F. ALAUZET, A. DERVIEUX. *An a priori anisotropic Goal-Oriented Error Estimate for Viscous Compressible Flow and Application to Mesh Adaptation*, November 2018, working paper or preprint, <https://hal.inria.fr/hal-01927113>
- [25] A. DERVIEUX, E. GAUCI, L. FRAZZA, A. BELME, A. CARABIAS, A. LOSEILLE, F. ALAUZET. *Mesh-Anpassung für k-genaue Approximationen in CFD*, November 2018, working paper or preprint, <https://hal.inria.fr/hal-01927145>
- [26] E. GAUCI, A. BELME, A. CARABIAS, A. LOSEILLE, F. ALAUZET, A. DERVIEUX. *A priori error-based mesh adaptation in CFD*, December 2018, working paper or preprint, <https://hal.inria.fr/hal-01928249>
- [27] J. V. LANGENHOVE, D. LUCOR, F. ALAUZET, A. BELME. *Goal-oriented error control of stochastic system approximations using metric-based anisotropic adaptations*, February 2018, <https://arxiv.org/abs/1805.00370> - working paper or preprint, <https://hal.inria.fr/hal-01703054>

References in notes

- [28] P.-G. CIARLET. *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, Ciarlet, P. G. and Lions, J. L., North Holland, 1991, vol. II
- [29] P.-J. FREY, P.-L. GEORGE. *Maillages. Applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris, 1999